《模型论》课程材料（未完稿）

2011 年 8 月 24 日

课程信息

- **时间**：2011秋，周一18：40 – 21:30；
- **地点**：三教101；
- **教材**：Chang & Keisler: *Model Theory*, 3rd ed. 1990；
- **任课教师**：叶峰，yefeng@phil.pku.edu.cn，13436581671
- **预备知识**：一阶逻辑，含完全性定理，紧致性定理，Löwenheim-Skolem定理，初等等价，初等类；素朴集合论，含选择公理、良序定理。
- **成绩评定**：平时作业，期末作业。
- **课程材料（未完稿）**：本课程材料包括课堂讲授的内容，内容选取自Chang & Keisler的书*Model Theory*，为该书的辅助学习材料。课程材料调整了原书中一些章节的顺序，略去了课堂上不讲的内容，并对书中的一些证明作了修改、补充，使其更易于理解。为便于对照阅读，本课程材料中的定理、引理、推论等等，都标出了对应的Chang & Keisler的书中的定理、引理、推论。课程材料目前是未完成的初稿，将在开学后修订、补充。

模型论课程作业

注：所有页码、习题号均指Chang & Keisler: *Model Theory*, 3rd ed. 1990中的页码、习题号；自己可以选做更多的题，期末成绩评定时会酌情加分。

p.33-34: Exercises 1.3.2, 1.3.9, 1.3.10, 1.3.11;

p.72-73: Exercises 2.1.3, 2.1.10, 2.1.12, 2.1.13;

p.145-145: Exercises 3.1.1, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.9;

p.223-225: Exercises 4.1.3, 4.1.10, 4.1.11, 4.1.16;

p.94–96: Exercises 2.2.1, 2.2.2 , 2.2.6, 2.2.14;

p.161: Exercises 3.2.1,

p.107-108: Exercises 2.3.1, 2.3.2, 2.3.7, 2.3.12

目　录

第一章　一阶逻辑与一阶理论基础

本章复习本课程所需要的一阶逻辑与一阶理论的基本知识。本课程假设学生已经学习过一阶逻辑，所以本章将很简练，仅仅是为了复习。

§1.1　一阶语言的语法、一阶推理系统

一、一阶语言

一个**一阶语言**$\mathcal{L}$是一些谓词符号、函数符号、常项符号的集合。这些符号称作$\mathcal{L}$的非逻辑符号。一般用P, P_0, P_1等指称谓词符号，F, F_0, F_1等指称函数符号，c, c_0, c_1等指称常项符号。每个谓词符号、函数符号有它的元数；常项符号可以视为0元函数符号。$\mathcal{L}$作为一个**语言的基数**定义为$\|\mathcal{L}\| = \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$，其中$|\mathcal{L}|$指集合$\mathcal{L}$的基数。$\mathcal{L}$称为一个**可数语言**，假如$\|\mathcal{L}\| = \aleph_0$。语言$\mathcal{L}'$是$\mathcal{L}$的**膨胀或扩张**，假如$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$。此时也称$\mathcal{L}$是$\mathcal{L}'$的**限制**。

二、一阶语言的项和公式

一个一阶语言的项和公式是由该语言的非逻辑符号和其它一些固定的逻辑符号构成的符号串，这些固定的逻辑符号包括，变元符号$v_0, v_1, v_2, ...$，逻辑常项$\neg, \rightarrow, \forall$，及逗号,和括弧$(,)$。一般用$x, y, z$等指称变元符号。

一个一阶语言$\mathcal{L}$的**项**递归地定义为：变元是$\mathcal{L}$的项；如F是$\mathcal{L}$的n元函数符号，$t_1, ..., t_n$是$\mathcal{L}$的项，则$F(t_1, ..., t_n)$也是$\mathcal{L}$的项。$\mathcal{L}$的**公式**递归地定义为：如P是$\mathcal{L}$的n元谓词符号，$t, s, t_1, ..., t_n$是$\mathcal{L}$的项，则$(t \equiv s), P(t_1, ..., t_n)$是$\mathcal{L}$的公式（又称原子公式）；如$\varphi, \psi$是$\mathcal{L}$的公式，$x$是任一变元，则$(\neg\varphi), (\varphi \rightarrow \psi), (\forall x\varphi)$是$\mathcal{L}$的公式。不产生歧义时括弧可省略。一般用$t, s$等代表项，用希腊字母$\varphi, \psi, \sigma, \theta$等代表公式。如一个项$t$出现于另一个项$s$中，则称$t$为$s$的**子项**；如一个公式$\varphi$出现于另一个公式$\psi$中，则称$\varphi$为$\psi$的**子公式**。

命题 1.1.1 （*C&K1.3.4*）[1] *$\mathcal{L}$的公式集的基数是$\|\mathcal{L}\|$。*

三、自由、约束、代入

设公式$\forall x\varphi$在公式ψ中某处出现，则此处出现的量词$\forall x$的**辖域**为此处出现的子公式$\forall x\varphi$，该辖域中的变元x的出现称为被量词$\forall x$**约束**，是x在ψ中的**约束出现**。一个变元x在一个公式ψ中的一处出现是**自由出现**，假如它不在任何量词$\forall x$的辖域中。x是ψ的**自由变元**，假如x在ψ中至少有一处出现是自由出现；x是ψ的**约束变元**，假如x在ψ中至少有一处出现是约束出现。称项t对公式φ中的变元x**可自由代入**，假如用t替换φ中的变元x的所有自由出现后，t中的变元不会被φ中的量词约束。此时用$\varphi[t/x]$表示这样的**代入**的结果。我们约定，用这个记号时可自由代入这个条件总是满足的。类似地，用$s[t/x]$表示用t替换项s中的变元x的所有出现的结果。$\varphi[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]$，$s[t_1/x_1, ..., t_n/x_n]$表示用$t_1, ..., t_n$同时地分别替换$x_1, ..., x_n$的所有自由出现的结果。设公式$\forall x\varphi$在

[1] 即Chang&Keisler, *Model Theory*中的命题1.3.4。下同。

公式ψ中某处出现，将ψ中此处出现的$\forall x\varphi$替换成$\forall y\varphi[y/x]$后所得的结果，称为ψ的一个约束变元**易字**。

$t(x_1,...,x_n)$表示项t中出现的变元都在$x_1,...,x_n$中；$\varphi(x_1,...,x_n)$表示公式φ的自由变元都在$x_1,...,x_n$中。注意，这里没有要求所有变元$x_1,...,x_n$确实都在该项或公式中出现，即允许这里$x_1,...,x_n$中包含多余的变元。用这些记号时我们约定，$x_1,...,x_n$等是不同的变元。此时$t[t_1/x_1,...,t_n/x_n]$又记为$t(t_1,...,t_n)$，$\varphi[t_1/x_1,...,t_n/x_n]$又记为$\varphi(t_1,...,t_n)$。$\overline{\varphi}$表示$\forall x_1...\forall x_n\varphi$，其中$x_1,...,x_n$是公式$\varphi$的所有自由变元（依顺序排列）；$\overline{\varphi}$称为$\varphi$的**闭包**。没有任何自由变元的语句称为**语句**。不含任何量词的公式称为**开公式**。

以上关于一阶语言的语法概念都可以用递归定义严格地定义。

四、初始的与定义的逻辑常项

以上约定了$\neg,\rightarrow,\forall$为初始逻辑常项，其它逻辑常项$\vee,\wedge,\leftrightarrow,\exists$等可用定义引进：$(\varphi\vee\psi)$定义为$(\neg\varphi\rightarrow\psi)$，$(\varphi\wedge\psi)$定义为$\neg(\varphi\rightarrow\neg\psi)$，$(\varphi\leftrightarrow\psi)$定义为$(\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\varphi)$，$\exists x\varphi$定义为$\neg\forall x\neg\varphi$。但有时为了归纳证明的方便，我们会假设$\neg,\wedge,\exists$为初始逻辑常项，其它逻辑常项则由$\neg,\wedge,\exists$定义。

五、一阶推理系统

可以有很多种方式构造完备的一阶推理系统。这里选择一个最常用的公理系统。一个公式称为**重言式**，假如它可以由一个命题逻辑重言式用一阶语言公式替换其中命题变元得到。

一阶逻辑公理为所有如下形式的公式：

1. 重言式；
2. $\forall x(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\forall x\psi)$其中$x$不在$\varphi$中自由出现；
3. $\forall x\varphi\rightarrow\varphi[t/x]$其中$t$可对公式$\varphi$中的变元$x$自由代入；
4. $x\equiv x$;
5. $x\equiv y\rightarrow t\equiv t[y/x]$;
6. $x\equiv y\rightarrow\varphi\rightarrow\varphi[y/x]$.

一阶逻辑推理规则为

1. **分离规则**（Modus Ponens）：从$\varphi,\varphi\rightarrow\psi$推出$\psi$；
2. **概括规则**：从φ推出$\forall x\varphi$。

设Σ是一个公式集。从前提集Σ到公式φ的**证明**是一个公式序列$\varphi_1,...,\varphi_m$，使得其中每个φ_i要么是一阶逻辑公理，要么是前提集Σ中的公式，要么是由序列中前面的公式用分离规则或概括规则推出，而且$\varphi_m=\varphi$。此时记$\Sigma\vdash\varphi$，称从前提集Σ**可推导**φ。$\varnothing\vdash\varphi$也记为$\vdash\varphi$。对证明作归纳可证

命题 1.1.2 （**演绎定理**）*如$\Sigma\cup\{\psi\}\vdash\varphi$，而且有一个从前提集$\Sigma\cup\{\psi\}$到公式$\varphi$的证明，使得其中所用的概括规则中被概括的变元都不是ψ的自由变元，则$\Sigma\vdash\psi\rightarrow\varphi$。特别地，$\psi$是语句时，如$\Sigma\cup\{\psi\}\vdash\varphi$，则总有$\Sigma\vdash\psi\rightarrow\varphi$。*

注意：由于所选择的一阶推理系统是有概括规则的系统，演绎定理中需要关于概括规则的条件。

推论 1.1.3 （**反证法原理**）*设ψ是语句，且$\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$，$\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi$，则$\Sigma \vdash \psi$。*

利用演绎定理和反证法原理容易得出一些常见的可推导关系，这里略去细节。

六、一致性

公式集Σ称为**一致的**，假如不存在φ使得$\Sigma \vdash \varphi$且$\Sigma \vdash \neg\varphi$。由于一个从前提集$\Sigma$到公式$\varphi$的证明中至多只涉及$\Sigma$中的有限个公式，显然，一个公式集$\Sigma$是一致的，当且仅当$\Sigma$的每个有限子集是一致的。

Σ称为**极大一致**的，假如Σ是一致的，而且对任何语句$\psi \notin \Sigma$，$\Sigma \cup \{\psi\}$不一致，即$\Sigma \vdash \neg\psi$。显然，Σ是极大一致的，当且仅当Σ是一致的，而且对任何语句ψ，$\psi \in \Sigma$或者$\neg\psi \in \Sigma$。

引理 1.1.4 （***Lindenbaum***引理，*C&K1.3.11*）*任何一阶语言$\mathcal{L}$的每个一致的语句集Σ可扩张为极大一致的语句集。*

证明：设$\|\mathcal{L}\| = \lambda$，设$\mathcal{L}$的所有语句为$\varphi_\xi$，$\xi < \lambda$。超穷递归地定义$\Sigma_\xi$如下：$\Sigma_0 = \Sigma$；设$\Sigma_\xi$已定义，如$\Sigma_\xi \cup \{\varphi_\xi\}$一致，则令$\Sigma_{\xi+1} = \Sigma_\xi \cup \{\varphi_\xi\}$，否则令$\Sigma_{\xi+1} = \Sigma_\xi$；对极限序数$\xi$，令$\Sigma_\xi = \cup_{\alpha<\xi}\Sigma_\alpha$。由定义，显然每个$\Sigma_\xi$一致，因此$\Sigma_\lambda$一致。设$\xi < \lambda$使得$\varphi_\xi \notin \Sigma_\lambda$，则$\varphi_\xi \notin \Sigma_{\xi+1}$，所以，由定义，$\Sigma_\xi \cup \{\varphi_\xi\}$不一致，所以$\Sigma_\lambda \cup \{\varphi_\xi\}$不一致。所以$\Sigma_\lambda$是极大一致的。注意：如$\mathcal{L}$是可数语言，则这个证明中用到的超穷归纳是普通数学归纳法。**证毕**。

§1.2 一阶语言的模型

一、一阶语言的模型

一阶语言$\mathcal{L}$的**模型**指有序对$\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$，其中$A$是一个非空集合，称为该模型的**个体域**，$\mathcal{I}$是定义在$\mathcal{L}$上的一个映射，使得对$\mathcal{L}$的每个$n$元谓词符号$P$，$\mathcal{I}(P) \subseteq A^n$，对$\mathcal{L}$的每个$n$元函数符号$F$，$\mathcal{I}(F) : A^n \to A$，对$\mathcal{L}$的每个常项符号$c$，$\mathcal{I}(c) \in A$。$\mathcal{I}(P)$、$\mathcal{I}(F)$、$\mathcal{I}(c)$也记为$P^{\mathfrak{A}}$、$F^{\mathfrak{A}}$、$c^{\mathfrak{A}}$，称为这些符号在$\mathfrak{A}$中的解释。如语言$\mathcal{L} = \{P, ..., F, ..., c, ...\}$，则$\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$有时也记为$\mathfrak{A} = \left\langle A, P^{\mathfrak{A}}, ..., F^{\mathfrak{A}}, ..., c^{\mathfrak{A}}, ... \right\rangle$。设语言$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup X$，$\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$是$\mathcal{L}$的模型，$\mathfrak{A}' = \langle A, \mathcal{I} \cup \mathcal{I}' \rangle$是$\mathcal{L}'$的模型，其中$\mathcal{I}'$为定义在$X$上的一个映射，则称$\mathfrak{A}'$是$\mathfrak{A}$的**膨胀**，也称$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{A}'$的**限制**。一个**模型$\mathfrak{A}$的基数**定义为$\|\mathfrak{A}\| = |A|$。

二、满足关系、有效性、可满足性

设$t(x_1, ..., x_n)$为$\mathcal{L}$的项，其中出现的变元都在$x_1, ..., x_n$中，$\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$是$\mathcal{L}$的模型，$a_1, ..., a_n \in A$。可递归定义**项的赋值**$t^{\mathfrak{A}}[a_1, ..., a_n] \in A$如下：如$t$是变元$x_i$，则$t^{\mathfrak{A}}[a_1, ..., a_n] = a_i$；如$t$是常项符号$c$，则$t^{\mathfrak{A}}[a_1, ..., a_n] = c^{\mathfrak{A}}$；如$t$是$F(t_1, ..., t_m)$，则

$$t^{\mathfrak{A}}[a_1, ..., a_n] = F^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, ..., a_n], ..., t_m^{\mathfrak{A}}[a_1, ..., a_n]\right)。$$

设$\varphi(x_1, ..., x_n)$为$\mathcal{L}$的公式，其自由变元都在$x_1, ..., x_n$中，$\mathfrak{A} = \langle A, \mathcal{I} \rangle$是$\mathcal{L}$的

模型，$a_1,...,a_n \in A$，可递归定义**满足关系**$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,...,a_n]$如下：如$\varphi$是等式$t=s$，则$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,...,a_n]$当且仅当$t^{\mathfrak{A}}[a_1,...,a_n] = s^{\mathfrak{A}}[a_1,...,a_n]$；如$\varphi$是原子公式$P(t_1,...,t_m)$，则$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,...,a_n]$当且仅当$P^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{A}}[a_1,...,a_n],...,t_m^{\mathfrak{A}}[a_1,...,a_n]\right)$；如$\varphi$是$\neg\psi$，则$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,...,a_n]$当且仅当并非$\mathfrak{A} \models \psi[a_1,...,a_n]$；如$\varphi$是$\psi \to \chi$，则$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,...,a_n]$当且仅当或者并非$\mathfrak{A} \models \psi[a_1,...,a_n]$，或者$\mathfrak{A} \models \chi[a_1,...,a_n]$；如$\varphi$是$\forall x_{n+1}\psi$，设已作约束变元易字使得$x_{n+1}$不同于$x_1,...,x_n$，则$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,...,a_n]$当且仅当对任何$a_{n+1} \in A$，$\mathfrak{A} \models \psi[a_1,...,a_{n+1}]$。满足关系$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,...,a_n]$成立时，称$a_1,...,a_n$在$\mathfrak{A}$中**满足**$\varphi$。

显然，如x_i不是$\varphi(x_1,...,x_i,...,x_n)$的自由变元，则$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,...,a_i,...,a_n]$对某个$a_i$成立，当且仅当它对任何$a_i$成立。如$\varphi$是语句，则$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1,...,a_n]$可记为$\mathfrak{A} \models \varphi$。当$\varphi$不是语句的时候，$\mathfrak{A} \models \varphi$表示$\mathfrak{A} \models \overline{\varphi}$。$\mathfrak{A} \models \varphi$成立时称$\mathfrak{A}$是$\varphi$的**模型**，或$\varphi$在$\mathfrak{A}$中**有效**。如$\Sigma$为$\mathcal{L}$的公式集，则$\mathfrak{A} \models \Sigma$表示：对所有$\varphi \in \Sigma$，$\mathfrak{A} \models \varphi$。此时称$\mathfrak{A}$是$\Sigma$的**模型**，又称$\Sigma$在$\mathfrak{A}$中**有效**。$\mathcal{L}$的公式集$\Sigma$称为**可满足**的，如有$\mathcal{L}$的模型$\mathfrak{A}$使得$\mathfrak{A} \models \Sigma$，即$\Sigma$有模型。设$\Sigma$是一个公式集，$\varphi$是一个公式，则$\Sigma \models \varphi$表示：对$\mathcal{L}$的任何模型$\mathfrak{A}$，如$\mathfrak{A} \models \Sigma$，则$\mathfrak{A} \models \varphi$。此时称$\varphi$是$\Sigma$的**逻辑后承**。$\varnothing \models \varphi$又记为$\models \varphi$。$\models \varphi$成立时称$\varphi$是**逻辑有效**的或**普遍有效**的。

定理 1.2.1（**一阶逻辑的可靠性**）如$\Sigma \vdash \varphi$，则$\Sigma \models \varphi$。特别地，如$\vdash \varphi$，则$\models \varphi$。如Σ有模型，则Σ是一致的。

三、同构、子模型、同构嵌入

设$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$是$\mathcal{L}$的模型，$f: A \to B$。称f为$\mathfrak{A}$与$\mathfrak{B}$的**同构**，记为$f: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$，假如$f$是双射，而且对$\mathcal{L}$的任何$n$元谓词符号$P$，及任意$a_1,...,a_n \in A$，

$$P^{\mathfrak{A}}(a_1,...,a_n)\text{ 当且仅当 }P^{\mathfrak{B}}(f(a_1),...,f(a_n))\text{；} \tag{1.1}$$

对$\mathcal{L}$的任何n元函数符号F，及任意$a_1,...,a_n \in A$，

$$f\left(F^{\mathfrak{A}}(a_1,...,a_n)\right) = F^{\mathfrak{B}}(f(a_1),...,f(a_n))\text{；} \tag{1.2}$$

对$\mathcal{L}$的任何常项符号c，

$$f\left(c^{\mathfrak{A}}\right) = c^{\mathfrak{B}}\text{。} \tag{1.3}$$

显然同构是等价关系。

设$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$是$\mathcal{L}$的模型。称$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{B}$的**子模型**，$\mathfrak{B}$是$\mathfrak{A}$的**扩张**，记为$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$，假如$A \subseteq B$，而且对$\mathcal{L}$的任何$n$元谓词符号$P$，及任意$a_1,...,a_n \in A$，

$$P^{\mathfrak{A}}(a_1,...,a_n)\text{ 当且仅当 }P^{\mathfrak{B}}(a_1,...,a_n)\text{；}$$

对$\mathcal{L}$的任何n元函数符号F，及任意$a_1,...,a_n \in A$，

$$F^{\mathfrak{A}}(a_1,...,a_n) = F^{\mathfrak{B}}(a_1,...,a_n)\text{；}$$

对$\mathcal{L}$的任何常项符号c，

$$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}\text{。}$$

显然子模型关系是传递的。当$\mathcal{L}$没有函数和常项符号时，给定$\mathcal{L}$的模型$\mathfrak{A}$的个体域的任意子集，$\mathfrak{A}$有一个以该子集为个体域的子模型。当$\mathcal{L}$有函数或常项符号时这不一定成立。

设$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$是$\mathcal{L}$的模型，$f: A \to B$。称f为$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$中的**同构嵌入**，记为$f: \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$，假如有$\mathfrak{B}$的子模型$\mathfrak{C}$使得$f: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$。显然，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$当且仅当$id_A: \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$，其中$id_A$是$A$上的恒等映射。容易证明，

命题 1.2.2 $f: \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$，当且仅当$f$是单映射且满足上面的条件（*1.1*）、（*1.2*）、（*1.3*）。

命题 1.2.3 设$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$是一阶语言$\mathcal{L}$的模型，$f: A \to B$。

（*a*）如$f: \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$，则对$\mathcal{L}$的任何项$t(x_1, ..., x_n)$，开公式$\varphi(x_1, ..., x_n)$，及任意$a_1, ..., a_n \in A$，

$$f\left(t^{\mathfrak{A}}[a_1, ..., a_n]\right) = t^{\mathfrak{B}}[f(a_1), ..., f(a_n)],$$
$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \ \textit{iff.}\ \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), ..., f(a_n)];$$

（*b*）如$f: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$，则对$\mathcal{L}$的任何公式$\varphi(x_1, ..., x_n)$，及任意$a_1, ..., a_n \in A$，

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \ \textit{iff.}\ \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), ..., f(a_n)];$$

（*c*）如对$\mathcal{L}$的任何原子公式及其否定$\varphi(x_1, ..., x_n)$及任意$a_1, ..., a_n \in A$，

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \ \textit{iff.}\ \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), ..., f(a_n)],$$

则$f: \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$。

证明：（a）对t, φ归纳。

（b）对φ归纳。

（c）$\varphi(v_1, v_2)$为$v_1 = v_2$时，由$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, a_2]$ iff. $\mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), f(a_2)]$可知$f$是单映射。类似地，$\varphi(x_1, ..., x_n)$为$P(x_1, ..., x_n)$时可得（1.1）。条件（1.2）、（1.3）可同样验证。**证毕**。

四、初等等价、初等嵌入

设$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$是一阶语言$\mathcal{L}$的模型。称$\mathfrak{A}$与$\mathfrak{B}$初等等价，记为$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，假如对$\mathcal{L}$的任何语句$\varphi$，$\mathfrak{A} \models \varphi$当且仅当$\mathfrak{B} \models \varphi$。设$f: A \to B$，称$f$为$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$中的初等嵌入，记为$f: \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$，假如对$\mathcal{L}$的任何公式$\varphi(x_1, ..., x_n)$及任意$a_1, ..., a_n \in A$，

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \text{ iff. } \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), ..., f(a_n)]。 \tag{1.4}$$

称$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{B}$的**初等子模型**，$\mathfrak{B}$是$\mathfrak{A}$的**初等扩张**，记为$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$，假如$A \subseteq B$，且$A$上恒等映射$id_A$是模型$\mathfrak{A}$到模型$\mathfrak{B}$中的初等嵌入。显然，$f: \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$，当且仅当有$\mathfrak{C} \preccurlyeq \mathfrak{B}$使得$f: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C} \preccurlyeq \mathfrak{B}$，当且仅当有$\mathfrak{C}$使得$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$。

例 1.2.1 $\langle N - \{0\}, \leq \rangle \subseteq \langle N, \leq \rangle$，且$\langle N - \{0\}, \leq \rangle \cong \langle N, \leq \rangle$，但对

$$\varphi(x) = \exists y (y \leq x \wedge \neg y \equiv x)$$

我们有$\langle N,\le\rangle\models\varphi[1]$，而$\langle N-\{0\},\le\rangle\not\models\varphi[1]$。所以$\langle N-\{0\},\le\rangle\preccurlyeq\langle N,\le\rangle$不成立。

命题 1.2.4 $f:\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$当且仅当$f:\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$，且对$\mathcal{L}$的任何公式$\exists x\varphi(x_1,...,x_n,x)$及任意$a_1,...,a_n\in A$，如$\mathfrak{B}\models\exists x\varphi[f(a_1),...,f(a_n),x]$，则有$a\in A$使得$\mathfrak{B}\models\varphi[f(a_1),...,f(a_n),f(a)]$。特别地，$\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$当且仅当$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$，且对$\mathcal{L}$的任何公式$\exists x\varphi(x_1,...,x_n,x)$及任意$a_1,...,a_n\in A$，如$\mathfrak{B}\models\exists x\varphi[a_1,...,a_n,x]$，则有$a\in A$使得$\mathfrak{B}\models\varphi[a_1,...,a_n,a]$。

证明: 必要性: 设$f:\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$。由命题1.2.3(c)可得$f:\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$。又设$a_1,...,a_n\in A$使得$\mathfrak{B}\models\exists x\varphi[f(a_1),...,f(a_n),x]$，由$f:\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$应有$\mathfrak{A}\models\exists x\varphi[a_1,...,a_n,x]$。因此有$a\in A$使得$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n,a]$，所以$\mathfrak{B}\models\varphi[f(a_1),...,f(a_n),f(a)]$。

充分性：对φ归纳证明（1.4）。φ为原子公式时由$f:\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$及命题1.2.3可得。$\varphi$为否定式、蕴涵式时由归纳假设显然。设$\varphi$是公式$\exists x\psi(x_1,...,x_n,x)$。设$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$，则有$a\in A$使得$\mathfrak{A}\models\psi[a_1,...,a_n,a]$。由归纳假设，$\mathfrak{B}\models\psi[f(a_1),...,f(a_n),f(a)]$。所以，$\mathfrak{B}\models\varphi[f(a_1),...,f(a_n)]$。反之设$\mathfrak{B}\models\varphi[f(a_1),...,f(a_n)]$。由假设，有$a\in A$使得$\mathfrak{B}\models\psi[f(a_1),...,f(a_n),f(a)]$。由归纳假设，$\mathfrak{A}\models\psi[a_1,...,a_n,a]$。所以，$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$。**证毕。**

命题 1.2.5 （*1*）如$\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$，则$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$;

（*2*）$\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{A}$;

（*3*）如$\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B}\preccurlyeq\mathfrak{C}$，则$\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{C}$;

（*4*）如$\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{C}$，$\mathfrak{B}\preccurlyeq\mathfrak{C}$，$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$，则$\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$。

证明：（1）、（2）、（3）显然。

（4）对$\mathcal{L}$的任何公式$\varphi(x_1,...,x_n)$及任意$a_1,...,a_n\in A$，

$$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]\ \text{iff.}\ \mathfrak{C}\models\varphi[a_1,...,a_n]\ \text{iff.}\ \mathfrak{B}\models\varphi[a_1,...,a_n]\text{。}$$

证毕。

命题 1.2.6 设$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$是语言$\mathcal{L}$的模型，$\mathfrak{A}$是有限的，且$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$，则$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$。

证明：令

$$\chi_k(v_1,...,v_k)=\begin{array}{c}\neg v_1\equiv v_2\wedge\neg v_1\equiv v_3...\wedge\neg v_{k-1}\equiv v_k\wedge\\ \forall v_{k+1}(v_{k+1}=v_1\vee...\vee v_{k+1}=v_k)\end{array}\text{。}$$

则$\exists v_1...\exists v_k\chi_k$表示模型中恰有$k$个互不相同的个体，因此由$\mathfrak{A}$有限，恰有一个$k$使得$\mathfrak{A}\models\exists v_1...\exists v_k\chi_k$。因此由$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$可知$\|\mathfrak{A}\|=\|\mathfrak{B}\|=k$对某个自然数$k$。设$A=\{a_1,...,a_k\}$。设$P$是语言$\mathcal{L}$的$n$-元谓词符号。对任意$n$元组$a=(a_{i_1},...,a_{i_n})\in A^n$，如$P^{\mathfrak{A}}(a_{i_1},...,a_{i_n})$，令$\varphi_{P,a}$为公式$P(v_{i_1},...,v_{i_n})$，否则令$\varphi_{P,a}$为公式$\neg P(v_{i_1},...,v_{i_n})$。令$\varphi_P$为公式$\wedge\{\varphi_{P,a}:a\in A^n\}$。设$F$是语言$\mathcal{L}$的$n$-元函数符号。对任意$n$元组$a=(a_{i_1},...,a_{i_n})\in A^n$，如$F^{\mathfrak{A}}(a_{i_1},...,a_{i_n})=a_{i_{n+1}}$，令$\varphi_{F,a}$为公式$F(v_{i_1},...,v_{i_n})=v_{i_{n+1}}$。令$\varphi_F$为公式$\wedge\{\varphi_{F,a}:a\in A^n\}$。对$\mathcal{L}$的任一常项符号$c$，如$c^{\mathfrak{A}}=a_i$，令$\varphi_c$为公式$c=v_i$。令

$$\varphi(v_1,...,v_k)=\wedge\left\{\varphi_\mu:\mu\text{是}\mathcal{L}\text{的谓词、函数或常项符号}\right\}\text{。}$$

显然，$\varphi[a_1,...,a_k]$完整地刻画了模型$\mathfrak{A}$中的各个谓词、函数与常项符号的解释，因此语句

$$\psi = \exists v_1 ... \exists v_k \left(\chi_k\left(v_1,...,v_k\right) \wedge \varphi\left(v_1,...,v_k\right)\right)$$

完整地刻画了模型$\mathfrak{A}$。不难看出，如$\mathfrak{B} \models \psi$，且$b_1,...,b_k \in B$使得$\mathfrak{B} \models \varphi[b_1,...,b_k]$，则映射$f : A \to B$，$f(a_i) = b_i$对$i = 1,...,k$，使得$f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$。**证毕**。

§1.3 完全性定理及其推论

一、一阶理论

$\mathcal{L}$的一个语句集T又称为$\mathcal{L}$的一个**一阶理论**或简称**理论**。一个理论T的模型即它作为语句集的模型，T是一致的、可满足等，也指它作为语句集是一致的、可满足等。一个理论T是（**语义**）**封闭的**，假如对任何语句φ，如$T \models \varphi$，则$\varphi \in T$。理论T是**完备的**，假如T是一致的，且对任何语句φ，要么$T \models \varphi$，要么$T \models \neg\varphi$。$\mathcal{L}$的两个理论T, T'是**等价的**，假如对任何语句φ，$T \models \varphi$当且仅当$T' \models \varphi$。两个公式φ, ψ称为T**等价的**，假如$T \models \varphi \leftrightarrow \psi$。设$T$为$\mathcal{L}$的封闭的理论，语言$\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$，$T$在$\mathcal{L}'$上的**限制**指$T$的是$\mathcal{L}'$的语句的元素构成的子集。设语言$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$，$T$为$\mathcal{L}$的理论，$T'$为$\mathcal{L}'$的理论，且$T \subseteq T'$，则称$T'$为$T$的**扩张**，$T$为$T'$的**子理论**。$\mathcal{L}$的理论$T$称为**范畴的**，假如$T$是一致的，且$T$的任何两个模型互相同构。设$\alpha$是一个基数，理论$T$称为$\alpha$**范畴的**，假如$T$是一致的，且$T$的任何两个基数为$\alpha$的模型互相同构。理论$T$的一个**公理集**指任何一个语句集$\Sigma$使得$\Sigma$与$T$是等价的理论。$T$称为**可有限公理化**的，假如$T$有一个有限的公理集。设$\mathfrak{A}$是$\mathcal{L}$的模型，**模型$\mathfrak{A}$的理论**$Th(\mathfrak{A})$指由$\mathcal{L}$的所有在$\mathfrak{A}$中有效的语句构成的理论。显然，$Th(\mathfrak{A})$是封闭的、完备的理论。

例 1.3.1 偏序理论：语言$\mathcal{L}_{ord} = \{\leq\}$。$\mathcal{L}_{ord}$的偏序理论的一个公理集由如下语句组成

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z \left(x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z\right), \\
&\forall x \forall y \left(x \leq y \wedge y \leq x \to x \equiv y\right), \\
&\forall x \left(x \leq x\right).
\end{aligned}$$

它的模型$\langle A, \leq\rangle$称为偏序结构，其中$\leq$称为A上的偏序。线性序理论的一个公理集由如上语句再加上

$$\forall x \forall y \left(x \leq y \vee y \leq x\right)$$

组成。如再加上公理

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \left(x \leq y \wedge \neg x \equiv y \to \exists z \left(x \leq z \wedge \neg x \equiv z \wedge z \leq y \wedge \neg z \equiv y\right)\right), \\
&\exists x \exists y \left(\neg x \equiv y\right),
\end{aligned}$$

则得到稠密线性序理论。如再加上公理

$$\forall x\exists y\exists z\left(y\leq x\wedge\neg y\equiv x\wedge x\leq z\wedge\neg x\equiv z\right)$$

则得到无端点稠密线性序理论。

例 1.3.2 皮亚诺（*Peano*）算术理论*PA*： 语言$\mathcal{L}_{PA}=\{0,S,+,\cdot\}$。皮亚诺算术理论***PA***是$\mathcal{L}_{PA}$的理论，它的一个公理集由所有如下形式的公式的闭包组成：

$$\begin{gathered}\neg Sx\equiv 0,\\ Sx\equiv Sy\rightarrow x\equiv y,\\ x+0\equiv x,\\ x+Sy\equiv S\left(x+y\right),\\ x\cdot 0\equiv 0,\\ x\cdot Sy\equiv\left(x\cdot y\right)+x,\\ \varphi\left[0/x\right]\wedge\forall x\left(\varphi\rightarrow\varphi\left[Sx/x\right]\right)\rightarrow\forall x\varphi.\end{gathered}$$

PA的标准模型$\mathfrak{N}=\langle N,0,S,+,\cdot\rangle$，其中$N$为自然数集合，$0,S,+,\cdot$为自然数*0*，及自然数的后继、加法、乘法函数。

二、完全性定理

设T是一阶语言$\mathcal{L}$的一致的理论。一个常项符号集$C\subseteq\mathcal{L}$的称为T的证据集，假如对$\mathcal{L}$的任何至多只含一个自由变元的公式$\varphi\left(x\right)$，有常项符号$c\in C$使得

$$T\vdash\exists x\varphi\left(x\right)\rightarrow\varphi\left(c\right).$$

引理 1.3.1 （*C&K2.1.1*）*设T是一阶语言$\mathcal{L}$的一致的理论，C是一个常项符号集，$C\cap\mathcal{L}=\varnothing$，$\mathcal{L}'=\mathcal{L}\cup C$，$|C|=\|\mathcal{L}\|$，则有$\mathcal{L}'$的一致的理论$T'$，使得$T\subseteq T'$，且$T'$以$C$为证据集。*

证明： 令$\lambda=|C|=\|\mathcal{L}\|$。设$C=\{c_\xi:\xi<\lambda\}$，设$\{\varphi_\xi:\xi<\lambda\}$为语言$\mathcal{L}'$的所有至多只含一个自由变元的公式。定义$T_\xi$，$\xi<\lambda$，如下：

（1）$T_0=T$。

（2）$T_{\xi+1}=T_\xi\cup\{\exists x\varphi_\xi\left(x\right)\rightarrow\varphi_\xi\left(c_\eta\right)\}$，其中$c_\eta$是$\{c_\beta:\beta<\lambda\}$中第一个不在$T_\xi$及$\varphi_\xi$中出现的常项符号。

（3）对极限序数ξ，$T_\xi=\cup_{\beta<\xi}T_\beta$。

可以证明，对$\xi<\lambda$，（2）中的c_η存在：令C_β为语句集T_β中出现的C中的新常项的集合。则$|C_{\beta+1}|=|C_\beta|+n_\beta$对某个有限数$n_\beta$，且对极限序数$\beta$，$C_\beta=\cup_{\alpha<\beta}C_\alpha$。因此，$\lambda=\aleph_0$时，归纳可证，对$\xi<\lambda$，每个$C_\xi$是有限集，所以（2）中的$c_\eta$存在。当$\lambda>\aleph_0$时，对$\beta<\lambda$归纳可证，$|C_\beta|\leq|\beta|+\aleph_0<\lambda$。所以（2）中的$c_\eta$存在。

显然$T_0\subseteq T_1\subseteq\ldots$。令$T'=\cup_{\xi<\lambda}T_\xi$。归纳可证每个$T_\xi$一致，因此$T'$一致。显然$T'$以$C$为证据集。**证毕**。

引理 1.3.2 （*C&K2.1.2*）设T是一阶语言$\mathcal{L}$的一致的理论，C是一个常项符号集，且T以C为证据集。则T有一个模型$\mathfrak{A}$使得它的每个个体都是C中某个常项的解释，即$A=\left\{c^{\mathfrak{A}}:c\in C\right\}$。

证明：由Lindenbaum引理T有完备的扩张，它显然还以C为证据集，因此不妨设T是完备的。定义C上二元关系$\sim$如下：对$c_1,c_2\in C$，

$$c_1\sim c_2\text{当且仅当}T\vdash c_1\equiv c_2\text{。}$$

对$c\in C$，令$\widetilde{c}=\{c'\in C:c\sim c'\}$，即$\widetilde{c}$是常项$c$所属的等价类。定义模型$\mathfrak{A}=\langle A,\mathcal{I}\rangle$如下：令$A=\{\widetilde{c}:c\in C\}$；对$\mathcal{L}$的$n$元谓词符号$P$及任意$\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}\in A$，令

$$P^{\mathfrak{A}}\left(\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}\right)\text{当且仅当}T\vdash P\left(c_1,...,c_n\right)\text{；}$$

对$\mathcal{L}$的n元函数符号F及任意$\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}\in A$，因$T$以$C$为证据集，有$c\in C$使得

$$T\vdash\exists x\left(F\left(c_1,...,c_n\right)=x\right)\to F\left(c_1,...,c_n\right)=c\text{，}$$

因此

$$T\vdash F\left(c_1,...,c_n\right)=c\text{，}$$

令

$$F^{\mathfrak{A}}\left(\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}\right)=\widetilde{c}\text{;}$$

对$\mathcal{L}$的常项符号d，因T以C为证据集，有$c\in C$使得

$$T\vdash\exists x\left(d=x\right)\to d=c\text{，}$$

因此

$$T\vdash d=c\text{，}$$

令

$$d^{\mathfrak{A}}=\widetilde{c}\text{。}$$

可以证明以上定义不依赖于等价类$\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n},\widetilde{c}$中的元素$c_1,...,c_n,c$的选择。

只要证$\mathfrak{A}\models T$。首先，对$c\in C$，显然$c^{\mathfrak{A}}=\widetilde{c}$。对$\mathcal{L}$的项$t\left(x_1,...,x_n\right)$以及$\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}\in A$，由$T$以$C$为证据集，有$c\in C$使得

$$T\vdash t\left(c_1,...,c_n\right)=c.$$

对t作结构归纳可证，此时必有$t^{\mathfrak{A}}\left[\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}\right]=\widetilde{c}$。

其次，对公式作结构归纳可证，对任何公式$\varphi\left(x_1,...,x_n\right)$，以及$\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}\in A$，

$$T\vdash\varphi\left(c_1,...,c_n\right)\text{当且仅当}\mathfrak{A}\models\varphi\left[\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}\right]\text{。}$$

$\varphi(x_1,...,x_n)$是原子公式$P(t_1(x_1,...,x_n),...,t_m(x_1,...,x_n))$时，有$d_1,...,d_m\in C$使得$T\vdash t_i(c_1,...,c_n)=d_i$，$t_i^{\mathfrak{A}}[\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}]=\widetilde{d_i}$，对$i=1,...,m$。因此，

$$
\begin{aligned}
&T\vdash\varphi(c_1,...,c_n)\\
\text{当且仅当}&T\vdash P(t_1(c_1,...,c_n),...,t_m(c_1,...,c_n))\\
\text{当且仅当}&T\vdash P(d_1,...,d_m)\\
\text{当且仅当}&\mathfrak{A}\models P(y_1,...,y_m)\left[\widetilde{d_1},...,\widetilde{d_m}\right]\\
\text{当且仅当}&\mathfrak{A}\models P(t_1(x_1,...,x_n),...,t_m(x_1,...,x_n))[\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}]\\
\text{当且仅当}&\mathfrak{A}\models\varphi[\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}]\text{。}
\end{aligned}
$$

$\varphi(x_1,...,x_n)$是否定式或合取式时，由归纳假设显然。设$\varphi(x_1,...,x_n)$是$\exists y\psi(x_1,...,x_n,y)$。如$\mathfrak{A}\models\varphi[\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}]$，则有$\widetilde{d}\in A$使得$\mathfrak{A}\models\psi\left[\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n},\widetilde{d}\right]$，因此由归纳假设，$T\vdash\psi(c_1,...,c_n,d)$，所以$T\vdash\varphi(c_1,...,c_n)$。反之，设$T\vdash\varphi(c_1,...,c_n)$，则由$T$以$C$为证据集，有$d\in C$使得

$$T\vdash\exists y\psi(c_1,...,c_n,y)\to\psi(c_1,...,c_n,d)\text{，}$$

所以$T\vdash\psi(c_1,...,c_n,d)$。再由归纳假设，$\mathfrak{A}\models\psi\left[\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n},\widetilde{d}\right]$，因此$\mathfrak{A}\models\varphi[\widetilde{c_1},...,\widetilde{c_n}]$。

对语句$\varphi\in T$，显然$T\vdash\varphi$，所以由上面的结论可得$\mathfrak{A}\models\varphi$。所以$\mathfrak{A}\models T$。**证毕**。

定理 1.3.3 （**一阶逻辑的完全性**）设Σ是一阶语言$\mathcal{L}$的任意的公式集，φ是任意的公式。如$\Sigma\models\varphi$，则$\Sigma\vdash\varphi$。特别地，如$\models\varphi$，则$\vdash\varphi$。如Σ是一致的，则Σ有模型。

证明：设T为Σ中公式的闭包构成的理论。设Σ一致。则T一致。任取一个常项符号集C使得$C\cap\mathcal{L}=\varnothing$，$|C|=\|\mathcal{L}\|$，由前引理1.3.1，$T$可扩张为一致的$T'$它以$C$为证据集。再由前引理1.3.2，$T'$有模型$\mathfrak{A}'$。令$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'|\mathcal{L}$，显然$\mathfrak{A}\models\Sigma$。又设$\Sigma\models\varphi$。假设$T\nvdash\overline{\varphi}$，则$T\cup\{\neg\overline{\varphi}\}$一致。因此它有模型$\mathfrak{A}$。显然$\mathfrak{A}\models\Sigma$但$\mathfrak{A}\nvDash\overline{\varphi}$因此$\mathfrak{A}\nvDash\varphi$。这与$\Sigma\models\varphi$矛盾。所以$T\vdash\overline{\varphi}$。所以$\Sigma\vdash\varphi$。**证毕**。

推论 1.3.4 （**紧致性定理**，*C&K1.3.22*）一个语句集有模型当且仅当它的每个有限子集有模型。

证明：必要性显然。设语句集Σ的每个有限子集有模型。因此Σ的每个有限子集是一致的。因此Σ是一致的。由完全性定理，Σ有模型。**证毕**。

推论 1.3.5 （*C&K2.1.5*）如理论T有任意大的有限模型则T有无穷模型。

证明：取无穷个不属于T的语言的新常项$c_0,c_1,...$，令

$$T'=T\cup\{\neg c_i\equiv c_j:i\neq j;i,j=0,1,...\}\text{。}$$

任给T'的有限子集Σ，有$n\geq 0$使得

$$\Sigma\subseteq T\cup\{\neg c_i\equiv c_j:i\neq j;i,j=0,...n\}\text{。}$$

由假设，T有模型$\mathfrak{A}$使得$\|\mathfrak{A}\| > n$。任取A中n+1个不同的个体$a_0, ..., a_n$，将$c_0, ..., c_n$分别解释为$a_0, ..., a_n$，则$\mathfrak{A}$膨胀为Σ的模型。所以。T'的任何有限子集有模型。由紧致性定理T'有模型$\mathfrak{A}$。$\mathfrak{A}$显然是T的无穷模型。**证毕**。

定理 1.3.6 （**向下的*Löwenheim-Skolem-Tarski*定理**，*C&K2.1.4*）*设T是一阶语言$\mathcal{L}$的一致的理论，则T有一个模型$\mathfrak{A}$使得$\|\mathfrak{A}\| \leq \|\mathcal{L}\|$。*

证明：取一个常项符号集C使得$C \cap \mathcal{L} = \varnothing$，$|C| = \|\mathcal{L}\|$，令$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$。由引理1.3.1，有$\mathcal{L}'$的理论$T' \supseteq T$，使得$T'$一致且以$C$为证据集。再由引理1.3.2，$T'$有模型$\mathfrak{A}'$使得它的个体都是$C$中常项的解释，因此$\|\mathfrak{A}'\| \leq |C| = \|\mathcal{L}\|$。令$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'|\mathcal{L}$，显然$\mathfrak{A} \models T$，而且$\|\mathfrak{A}\| \leq \|\mathcal{L}\|$。**证毕**。

定理 1.3.7 （**向上的*Löwenheim-Skolem-Tarski*定理**，*C&K2.1.6*）*设T是一阶语言$\mathcal{L}$的理论，且T有无穷模型，则对任何基数$\alpha \geq \|\mathcal{L}\|$，$T$有基数$\alpha$的模型。*

证明：取α个不属于T的语言的新常项$c_\xi, \xi < \alpha$，令$T' = T \cup \{\neg c_\xi \equiv c_\eta :\ \xi < \eta < \alpha\}$。任给$T'$的有限子集$\Sigma$，有$\xi_0, ..., \xi_n$使得$\Sigma \subseteq T \cup \left\{\neg c_{\xi_i} \equiv c_{\xi_j} : i \neq j; i, j = 0, ...n\right\}$。由假设，$T$有无穷模型$\mathfrak{A}$。任取$A$中$n$+1个不同的个体$a_0, ..., a_n$，将$c_{\xi_i}, i = 0, .., n$，分别解释为$a_0, ..., a_n$，则$\mathfrak{A}$膨胀为$\Sigma$的模型。所以。$T'$的任何有限子集有模型。因此$T'$一致。由向下的Löwenheim-Skolem-Tarski引理，T'有模型$\mathfrak{A}$使得$\|\mathfrak{A}\| \leq \alpha$。由$\mathfrak{A} \models \neg c_\xi \equiv c_\eta$对$\xi < \eta < \alpha$，显然$\|\mathfrak{A}\| \geq \alpha$。所以$\|\mathfrak{A}\| = \alpha$。**证毕**。

语言$\mathcal{L}$的模型构成的一个类K称为一个初等类，如有一个理论T使得$K = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models T\}$。$K$称为一个基本初等类，如有一个语句$\varphi$使得$K = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \varphi\}$。

推论 1.3.8 *$\mathcal{L}$的所有有穷模型组成的类不是初等类。*

证明：设不然，则有理论T使得对$\mathcal{L}$的任意模型$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A} \models T$当且仅当$\mathfrak{A}$是有穷模型。因此T有任意大的有限模型。因此由上面的推论1.3.5，T有无穷模型。矛盾。**证毕**。

这个推论表明“有穷模型”这个性质不能用一阶语言的语句表达。

推论 1.3.9 （*C&K2.1.7*）*皮亚诺算术理论**PA**及完备数论$Th(\mathfrak{N})$有可数的非标准模型。*

证明：对自然数n，用$\overline{n}$表示项$S...S0$，其中有n个S。取一个新的常项符号c，令

$$T = Th(\mathfrak{N}) \cup \left\{\neg c \equiv 0, \neg c \equiv \overline{1}, \neg c \equiv \overline{2}, ...\right\}。$$

显然，T的任何有限子集有模型，只要在标准模型中将c解释为一个充分大的自然数。所以T有可数模型$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}$即为**PA**及完备数论$Th(\mathfrak{N})$的非标准模型。**证毕**。

在上面的非标准模型$\mathfrak{A}$中，对任何自然数n，$c^{\mathfrak{A}} \neq \overline{n}^{\mathfrak{A}}$。这样一个个体$c^{\mathfrak{A}}$称作一个**非标准数**。显然，如定义

$$(x < y) =_{df} \exists z\,(x + z = y \wedge \neg z \equiv 0)，$$

则对任何自然数n及非标准数$a \in A$应有$\mathfrak{A} \models \overline{n} < a$，即非标准数是无穷数。另外，不存在公式$\varphi(x)$使得对任何$a \in A$，$\mathfrak{A} \models \varphi[a]$当且仅当$a$是$\mathfrak{A}$中一个标准

数，即“标准数”、“非标准数”这些概念不能用一阶语言的公式表达。设不然，则对任何自然数n，$\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{n})$，因此$\mathfrak{N} \models \varphi(\overline{n})$。所以$\mathfrak{N} \models \forall x \varphi(x)$，因此应有$\mathfrak{A} \models \forall x \varphi(x)$，所以对任何$a \in A$都有$\mathfrak{A} \models \varphi[a]$，矛盾。

第二章　模型论的基本方法

§2.1　消除量词法

对一个理论T，消除量词法的目的在于证明，每个公式φ都T等价于某种更简单形状的公式，由此证明理论T有某种特征。证明的要点常常在于证明可以消去φ中的量词，因此将φ简化。这里以无端点的稠密线性序理论Δ为例，用消除量词法证明Δ是完备的理论。本节假设$\neg,\wedge,\exists$为基本命题连接词和量词，其它命题连接词和量词由它们定义。

引理 2.1.1 （*C&K1.5.1*）*设T是一个理论，Σ是一个公式集，称为基本公式集。要证每个公式T等价于基本公式的一个布尔组合，只要证（i）每个原子公式T等价于基本公式的一个布尔组合；（ii）如θ是T等价于基本公式的一个布尔组合，则$\exists x\theta$也是T等价于基本公式的一个布尔组合。*

证明：对公式作结构归纳。**证毕**。

令基本公式为$v_m\equiv v_n, v_m\leq v_n$，$m,n=0,1,...$。令

$$(v_m<v_n)=_{df}(v_m\leq v_n\wedge\neg v_m\equiv v_n)。$$

变元$v_0,...,v_n$的一个排列指将$v_0,...,v_n$以任何一种方式重新排为$x_0,...,x_n$后构造的一个公式$\psi=\theta_0\wedge...\wedge\theta_{n-1}$，其中$\theta_i$可以为$x_i<x_{i+1}$或$x_i\equiv x_{i+1}$。对任何线性序模型$\mathfrak{A}=\langle A,\leq\rangle$及任意$a_0,...,a_n\in A$，$a_0,...,a_n$满足变元$v_0,...,v_n$的一个排列$\psi$。只要将$a_0,...,a_n$依顺序$\leq$重新排列，相应的变元$v_0,...,v_n$的排列$\psi$即被$a_0,...,a_n$满足。

引理 2.1.2 *设ψ是变元$v_0,...,v_n$的一个排列，则对任何开公式$\varphi(v_0,...,v_n)$，$\Delta\vdash\psi\to\varphi$或者$\Delta\vdash\psi\to\neg\varphi$。*

证明：设ψ是变元$v_0,...,v_n$重新排为$x_0,...,x_n$后构造的一个公式。ψ可表示为

$$x_0\equiv...\equiv x_{i_1-1}<x_{i_1}\equiv...\equiv x_{i_2-1}<x_{i_2}\equiv...\equiv x_{i_3-1}<...。$$

对公式φ作结构归纳证明引理的结论。

（1）φ为原子公式$x_i\equiv x_j$或$x_i\leq x_j$。显然，当i,j同属于一组$(x_{i_k},...,x_{i_{k+1}-1})$时，$\Delta\vdash\psi\to x_i\equiv x_j$，否则$\Delta\vdash\psi\to\neg x_i\equiv x_j$。对$x_i\leq x_j$类似的结论成立。

（2）φ为$\neg\varphi_1,\varphi_1\wedge\varphi_2$时，由归纳假设显然。**证毕**。

引理 2.1.3 （*C&K1.5.2*）*每个开公式$\varphi(v_0,...,v_n)$都Δ等价于$v_0<v_0, v_0\equiv v_0$，或$v_0,...,v_n$的一些排列的析取。*

证明：首先考虑$n=0$的情形。此时φ由$v_0\equiv v_0$，$v_0\leq v_0$用$\neg,\wedge$构成。由于$\Delta\vdash v_0\equiv v_0$，$\Delta\vdash v_0\leq v_0$，归纳易证，$\Delta\vdash\varphi$或者$\Delta\vdash\neg\varphi$。因为$\Delta\vdash\neg v_0<v_0$。所以$\Delta\vdash\varphi\leftrightarrow v_0\equiv v_0$或者$\Delta\vdash\varphi\leftrightarrow v_0<v_0$。

其次设$n>0$。如$\Delta\vdash\neg\varphi$，则$\Delta\vdash\varphi\leftrightarrow v_0<v_0$。所以设$\Delta\nvdash\neg\varphi$。因此有$\mathfrak{A}$使得$\mathfrak{A}\models\Delta$但是$\mathfrak{A}\nvDash\neg\varphi$。所以有$a_0,...,a_n\in A$使得$\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,...,a_n]$。$a_0,...,a_n$满

足变元$v_0,...,v_n$的一个排列ψ，即$\mathfrak{A}\models\psi[a_0,...,a_n]$。由引理2.1.2，$\Delta\vdash\psi\to\varphi$或者$\Delta\vdash\psi\to\neg\varphi$。所以$\mathfrak{A}\models\psi\to\varphi$或者$\mathfrak{A}\models\psi\to\neg\varphi$。由于$\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,...,a_n]$，$\mathfrak{A}\models\psi[a_0,...,a_n]$，只能有$\Delta\vdash\psi\to\varphi$。所以至少有一个排列$\psi$使得$\Delta\vdash\psi\to\varphi$。$v_0,...,v_n$的排列至多有有限个。设$\psi_1,...,\psi_m$为其中所有使得$\Delta\vdash\psi_i\to\varphi$成立的$v_0,...,v_n$的排列。令$\theta=\psi_1\vee...\vee\psi_m$，则$\Delta\vdash\theta\to\varphi$。反之可证$\Delta\vdash\varphi\to\theta$。只要证$\Delta\models\varphi\to\theta$。为此设$\mathfrak{A}\models\Delta$，$\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,...,a_n]$。同上证明可知，有变元$v_0,...,v_n$的一个排列$\psi$使得$\mathfrak{A}\models\psi[a_0,...,a_n]$以及$\Delta\vdash\psi\to\varphi$。因此$\psi$一定在$\psi_1,...,\psi_m$中。所以$\mathfrak{A}\models\theta[a_0,...,a_n]$。所以$\Delta\models\varphi\to\theta$。所以$\Delta\models\varphi\leftrightarrow\theta$。**证毕**。

定理 2.1.4 （*C&K1.5.3*）每个公式$\varphi(v_0,...,v_n)$都Δ等价于一个开公式。

证明：对φ归纳。

（1）φ为原子公式、否定式、合取式时显然。

（2）设φ为$\exists x\varphi'$。通过约束变元易字，不妨设φ为$\exists v_{n+1}\varphi'(v_0,...,v_{n+1})$。由归纳假设，$\varphi'(v_0,...,v_{n+1})$已是$\Delta$等价于一个开公式$\chi(v_0,...,v_{n+1})$。由上引理，可分两种情形：

（2.1）χ是Δ等价于$v_0<v_0$或者$v_0\equiv v_0$：此时$\exists v_{n+1}\chi$也是Δ等价于$v_0<v_0$或者$v_0\equiv v_0$，所以φ也是Δ等价于$v_0<v_0$或$v_0\equiv v_0$。

（2.2）χ是Δ等价于$\psi_1\vee...\vee\psi_m$，其中每个ψ_i是变元$v_0,...,v_{n+1}$的一个排列：此时，$\exists v_{n+1}\chi$应是Δ等价于$\exists v_{n+1}\psi_1\vee...\vee\exists v_{n+1}\psi_m$。所以只要证，对$v_0,...,v_{n+1}$的任何排列$\psi$，$\exists v_{n+1}\psi$是$\Delta$等价于一个开公式。设$\psi$是$\theta_0\wedge...\wedge\theta_n$，其中$\theta_i$或是$x_i<x_{i+1}$或是$x_i\equiv x_{i+1}$，而$x_0,...,x_{n+1}$是变元$v_0,...,v_{n+1}$的一个重排。设$v_{n+1}$是$x_j$。$0<j<n+1$时，$\psi$可取如下形式之一

$$...\wedge x_{j-1}\equiv v_{n+1}\wedge v_{n+1}\equiv x_{j+1}\wedge...,$$

$$...\wedge x_{j-1}\equiv v_{n+1}\wedge v_{n+1}< x_{j+1}\wedge...,$$

$$...\wedge x_{j-1}< v_{n+1}\wedge v_{n+1}\equiv x_{j+1}\wedge...,$$

$$...\wedge x_{j-1}< v_{n+1}\wedge v_{n+1}< x_{j+1}\wedge...。$$

$\exists v_{n+1}\psi$相应地Δ等价于

$$...\wedge x_{j-1}\equiv x_{j+1}\wedge...,$$

$$...\wedge x_{j-1}< x_{j+1}\wedge...,$$

$$...\wedge x_{j-1}< x_{j+1}\wedge...,$$

$$...\wedge x_{j-1}< x_{j+1}\wedge...。$$

（最后一个等价式用到了Δ中的稠密性公理。）所以$\exists v_{n+1}\psi$是Δ等价于一个开公式。$j=0$或者$j=n+1$时，用Δ中的无端点公理同理可证。所以，对$v_0,...,v_{n+1}$的任何排列ψ，$\exists v_{n+1}\psi$是Δ等价于一个开公式。所以$\exists v_{n+1}\chi$是Δ等价于一个开公式。所以$\exists v_{n+1}\chi$是Δ等价于一个开公式。

综上，φ是Δ等价于一个开公式。**证毕**。

推论 2.1.5 （*C&K1.5.4*）Δ是完备的理论。

证明：对任何语句φ，φ可写成$\varphi(v_0)$。所以φ是Δ等价于公式$v_0 \equiv v_0$与公式$v_0 \leq v_0$的一个布尔组合，所以$\Delta \vdash \varphi$或者$\Delta \vdash \neg\varphi$。**证毕**。

推论 2.1.6 设$\mathbb{Q}$为有理数集，$\mathbb{R}$为实数集，则$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \preccurlyeq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$。

证明：对任何$\varphi(v_0, ..., v_n)$，有开公式$\psi(v_0, ..., v_n)$使得$\Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$。所以，$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \models \varphi \leftrightarrow \psi$，$\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \models \varphi \leftrightarrow \psi$。对$a_0, ..., a_n \in \mathbb{Q}$和开公式$\psi(v_0, ..., v_n)$，易证

$$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \models \psi[a_0, ..., a_n] \text{ iff. } \langle \mathbb{R}, \leq \rangle \models \psi[a_0, ..., a_n] 。$$

所以，对$a_0, ..., a_n \in \mathbb{Q}$，

$$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \models \varphi[a_0, ..., a_n] \text{ iff. } \langle \mathbb{R}, \leq \rangle \models \varphi[a_0, ..., a_n] 。$$

证毕。

§2.2 模型的图与扩张

设$\mathfrak{A}$是一阶语言$\mathcal{L}$的模型。令

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\},$$

其中对$a \in A$，新常项$c_a \notin \mathcal{L}$，且对$a, b \in A$，$a \neq b$，$c_a \neq c_b$。令

$$\mathfrak{A}_A = (\mathfrak{A}, a)_{a \in A}$$

为$\mathcal{L}_A$的模型，它将每个c_a解释为a。对$X \subseteq A$，$\mathcal{L}_X$与$\mathfrak{A}_X = (\mathfrak{A}, a)_{a \in X}$可类似地定义。设$\mathfrak{B}$是语言$\mathcal{L}$的另一模型，$f : X \to B$，则$(\mathfrak{B}, f(a))_{a \in X}$是语言$\mathcal{L}_X$的模型，对$a \in X$，它将$c_a$解释为$f(a)$。

$\mathfrak{A}$的**图**（diagram）定义为

$$\Delta_{\mathfrak{A}} = \{\varphi : \varphi\text{为}\mathcal{L}_A\text{的原子语句或其否定且使得}\mathfrak{A}_A \models \varphi\} 。$$

因此，对$\mathcal{L}$的n元谓词符号P及任意$a_1, ..., a_n \in A$，如$P^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)$，则$P(c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \in \Delta_{\mathfrak{A}}$，否则$\neg P(c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \in \Delta_{\mathfrak{A}}$。对$\mathcal{L}$的$n$元函数符号$F$及任意$a_1, ..., a_n, a \in A$，如$F^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) = a$，则$F(c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \equiv c_a \in \Delta_{\mathfrak{A}}$，否则$\neg F(c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \equiv c_a \in \Delta_{\mathfrak{A}}$。对$\mathcal{L}$的常项符号$d$，$a \in A$，如$d^{\mathfrak{A}} = a$，则$d \equiv c_a \in \Delta_{\mathfrak{A}}$，否则$\neg d \equiv c_a \in \Delta_{\mathfrak{A}}$。还有，对$a_1, a_2 \in A$，$a_1 \neq a_2$，有$\neg c_{a_1} \equiv c_{a_2} \in \Delta_{\mathfrak{A}}$。所以$\mathfrak{A}$的图以一种方式描绘了$\mathfrak{A}$中的个体及函数、谓词、常项的值。但注意，$\mathfrak{A}$的图只描绘了$\mathfrak{A}$的个体之间的关系，不能表达“$c_a$等等就是所有个体”这种条件，结果，如以下命题和推论所显示，$\mathfrak{A}$的扩张也满足$\mathfrak{A}$的图。

命题 2.2.1 （*C&K2.1.8*）设$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$是一阶语言$\mathcal{L}$的模型。

（*1*）设$f : A \to B$，则f是$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$中的同构嵌入，即$f : \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$，当且仅当$(\mathfrak{B}, f(a))_{a \in A} \models \Delta_{\mathfrak{A}}$。特别地，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$，当且仅当$A \subseteq B$而且$(\mathfrak{B}, a)_{a \in A} \models \Delta_{\mathfrak{A}}$。

（2）$\mathfrak{A}$可同构嵌入到$\mathfrak{B}$中当且仅当$\mathfrak{B}$可膨胀为$\Delta_{\mathfrak{A}}$的模型。

证明：（1）设$f:\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$，$\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})\in\Delta_{\mathfrak{A}}$，其中$c_{a_1},...,c_{a_n}$为$\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$中出现的所有新常项。由命题1.2.3（a），

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_A &\models \varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})\\ \text{iff. } \mathfrak{A} &\models \varphi[a_1,...,a_n]\\ \text{iff. } \mathfrak{B} &\models \varphi[f(a_1),...,f(a_n)]\\ \text{iff. } (\mathfrak{B},f(a))_{a\in A} &\models \varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})。\end{aligned}$$

所以$(\mathfrak{B},f(a))_{a\in A}\models\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$。反之，设$(\mathfrak{B},f(a))_{a\in A}\models\Delta_{\mathfrak{A}}$。对$\mathcal{L}$的任何原子公式或否定$\varphi(x_1,...,x_n)$及任意$a_1,...,a_n\in A$，

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &\models \varphi[a_1,...,a_n]\\ \text{iff. } \varphi(c_{a_1},...,c_{a_n}) &\in \Delta_{\mathfrak{A}}\\ \text{iff. } (\mathfrak{B},f(a))_{a\in A} &\models \varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})\\ \text{iff. } \mathfrak{B} &\models \varphi[f(a_1),...,f(a_n)]。\end{aligned}$$

由命题1.2.3（c）有$f:\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$。

（2）必要性由（1）显然。反之设$\mathfrak{B}$可膨胀为$\Delta_{\mathfrak{A}}$的模型$\mathfrak{B}'$。令$f:A\to B'$定义为：$f(a)=c_a^{\mathfrak{B}'}$，对$a\in A$。显然$\mathfrak{B}'=(\mathfrak{B},f(a))_{a\in A}$。所以由（1），$f:\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$。**证毕**。

推论 2.2.2 （*C&K2.1.9*）设$\mathcal{L}$无常项、函数符号，T是$\mathcal{L}$的理论，$\mathfrak{A}$是$\mathcal{L}$的模型，则$\mathfrak{A}$可同构嵌入于T的一个模型，当且仅当$\mathfrak{A}$的每个有限子模型可同构嵌入于T的一个模型。

证明：必要性显然。反之设$\mathfrak{A}$的每个有限子模型可同构嵌入于T的一个模型。由上命题只要证$T\cup\Delta_{\mathfrak{A}}$有模型。设$\Sigma$为语句集$T\cup\Delta_{\mathfrak{A}}$的一个有限子集。则有有限个$a_1,...,a_n\in A$使得$\Sigma$中出现的新常项都在$c_{a_1},...,c_{a_n}$中。令$A'=\{a_1,...,a_n\}$。因为$\mathcal{L}$无常项、函数符号，$\mathfrak{A}$有子模型$\mathfrak{A}'$它以$A'$为个体域。显然$\Sigma\subseteq T\cup\Delta_{\mathfrak{A}'}$。由假设，$\mathfrak{A}'$可同构嵌入于$T$的一个模型$\mathfrak{B}$。所以$\mathfrak{B}$可膨胀为$\Delta_{\mathfrak{A}'}$的模型$\mathfrak{B}'$。但$\mathfrak{B}\models T$。所以$\mathfrak{B}'\models T\cup\Delta_{\mathfrak{A}'}$。所以$\Sigma$有模型。由紧致性定理，$T\cup\Delta_{\mathfrak{A}}$有模型。**证毕**。

设$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$是$\mathcal{L}$的模型。$\mathfrak{A}$的正图定义为

$$\Delta_{\mathfrak{A}}^{+}=\left\{\varphi:\varphi\text{为}\mathcal{L}_A\text{的原子语句使得}\mathfrak{A}_A\models\varphi\right\}。$$

设$f:A\to B$。称f为$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$上的**同态**（homomorphism），记为$f:\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{B}$，假如$f$是满射，且对$\mathcal{L}$的任何$n$元谓词符号$P$，及任意$a_1,...,a_n\in A$，

$$\text{如}P^{\mathfrak{A}}(a_1,...,a_n)\text{，则}P^{\mathfrak{B}}(f(a_1),...,f(a_n));$$

对$\mathcal{L}$的任何n元函数符号F，及任意$u_1,...,u_n\in A$，

$$f\left(F^{\mathfrak{A}}(a_1,...,a_n)\right)=F^{\mathfrak{B}}(f(a_1),...,f(a_n));$$

对$\mathcal{L}$的任何常项符号c，

$$f\left(c^{\mathfrak{A}}\right)=c^{\mathfrak{B}}。$$

称f为$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$中的**同态嵌入**，假如f是$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的一个子模型上的同态，记为$f:\mathfrak{A}\widetilde{\subseteq}\mathfrak{B}$。一个**正公式**是由原子公式用$\vee,\wedge,\forall,\exists$构造出的公式。易证，如$f:\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{B}$，则对$\mathcal{L}$的任何项$t(x_1,...,x_n)$，正公式$\varphi(x_1,...,x_n)$，及任意$a_1,...,a_n\in A$，

$$f\left(t^{\mathfrak{A}}[a_1,...,a_n]\right)=t^{\mathfrak{B}}[f(a_1),...,f(a_n)],$$
$$\text{如}\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]\text{，则}\mathfrak{B}\models\varphi[f(a_1),...,f(a_n)]。$$

命题 2.2.3 （*C&K2.1.12*）$\mathfrak{A}$可同态嵌入到$\mathfrak{B}$中，当且仅当$\mathfrak{B}$可膨胀为$\mathfrak{A}$的正图$\Delta_{\mathfrak{A}}^{+}$的模型。

证明：同命题2.2.1。**证毕**。

推论 2.2.4 （*C&K2.1.13*）每个偏序集A可扩张成线性序。

证明：设$\leq$是A上偏序，令$\mathfrak{A}=\langle A,\leq\rangle$。考虑$\mathcal{L}_A$的语句集

$$\Sigma=\Delta_{\mathfrak{A}}^{+}\cup\{\neg c_a\equiv c_b:a,b\in A\}\cup\{\sigma\},$$

其中σ为线性序公理。设Γ是Σ的有限子集，则有$a_1,...,a_n\in A$使得

$$\Gamma\subseteq\left\{c_{a_i}\leq c_{a_j}:a_i\leq a_j,i,j=1,...,n\right\}\cup\{c_{a_i}\equiv c_{a_i}:i=1,...,n\}\cup$$
$$\left\{\neg c_{a_i}\equiv c_{a_j}:i\neq j,i,j=1,...,n\right\}\cup\{\sigma\}。$$

对n归纳可证，偏序集$\langle\{a_1,...,a_n\},\leq\rangle$可扩张成线性序集$\langle\{a_1,...,a_n\},\leq^*\rangle$。则模型$\langle\{a_1,...,a_n\},\leq^*\rangle\models\Gamma$。所以$\Sigma$的任意有限子集有模型。所以$\Sigma$有模型$\mathfrak{B}$。定义$A$上关系$\leq^*$如下：对$a,b\in A$，

$$a\leq^* b \text{ iff. } \mathfrak{B}\models c_a\leq c_b。$$

显然，$\leq\subseteq\leq^*$，且$\leq^*$是线性序。**证毕**。

设$\mathfrak{A}$是$\mathcal{L}$的模型。$\mathfrak{A}$的初等图定义为$Th(\mathfrak{A}_A)=\left\{\varphi:\varphi\text{为}\mathcal{L}_A\text{的语句使得}\mathfrak{A}_A\models\varphi\right\}$。

命题 2.2.5 （*C&K3.1.3*）$\mathfrak{A}$可初等嵌入到$\mathfrak{B}$中，当且仅当$\mathfrak{B}$可膨胀为$\mathfrak{A}$的初等图$Th(\mathfrak{A}_A)$的模型。特别地，$\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$当且仅当$A\subseteq B$且$(\mathfrak{B},a)_{a\in A}\models Th(\mathfrak{A}_A)$。

证明：必要性：设$f:\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$，$\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})\in Th(\mathfrak{A}_A)$，其中$c_{a_1},...,c_{a_n}$为公式$\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$中出现的所有新常项。所以$\mathfrak{A}_A\models\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$。所以$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$。所以$\mathfrak{B}\models\varphi[f(a_1),...,f(a_n)]$。所以$(\mathfrak{B},f(a))_{a\in A}\models\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$。所以$(\mathfrak{B},f(a))_{a\in A}\models Th(\mathfrak{A}_A)$。

充分性：设$\mathfrak{B}$可膨胀为$\mathfrak{B}'\models Th(\mathfrak{A}_A)$。$\mathfrak{B}'$可表示为$(\mathfrak{B},f(a))_{a\in A}$，其中$f(a)=c_a^{\mathfrak{B}}$，对$a\in A$。由$(\mathfrak{B},f(a))_{a\in A}\models Th(\mathfrak{A}_A)$可得，对任意公式$\varphi(x_1,...,x_n)$以及$a_1,...,a_n\in A$，$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$当且仅当$\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})\in Th(\mathfrak{A}_A)$，当且仅当$(\mathfrak{B},f(a))_{a\in A}\models\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$，当且仅当$\mathfrak{B}\models\varphi[f(a_1),...,f(a_n)]$。所以$f:\mathfrak{A}\preccurlyeq\mathfrak{B}$。**证毕**。

命题 2.2.6 （*C&K3.1.4*）设$\mathcal{F}$是$\mathcal{L}$的两两初等等价的模型的集合，则有$\mathcal{L}$的模型$\mathfrak{B}$使得$\mathcal{F}$中每个模型可初等嵌入$\mathfrak{B}$中。

证明：设对$\mathcal{F}$中任何两个不同的模型$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$，相应的$\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_{A'}$中的新常项不相交。令$\Sigma = \cup_{\mathfrak{A} \in \mathcal{F}} Th(\mathfrak{A}_A)$。由上引理只需证明$\Sigma$有模型。设$\Gamma$是$\Sigma$的一个有限子集。将$\Gamma$中属于同一个语言$\mathcal{L}_A$的语句合取起来，不妨设$\Gamma = \{\varphi_0, ..., \varphi_n\}$，其中$\varphi_i \in Th\left((\mathfrak{A}_i)_{A_i}\right)$，$i = 0, ..., n$，且$\mathfrak{A}_i$两两不同。每个$\varphi_i$可表达为$\varphi_i\left(c_{a_{i1}}, ..., c_{a_{ik_i}}\right)$，其中$c_{a_{i1}}, ..., c_{a_{ik_i}} \in \mathcal{L}_{A_i}$且为$\varphi_i\left(c_{a_{i1}}, ..., c_{a_{ik_i}}\right)$中出现的所有新常项。所以$\mathfrak{A}_i \models \varphi_i[a_{i1}, ..., a_{ik_i}]$。所以$\mathfrak{A}_i \models \exists x_1 ... \exists x_{k_i} ... \varphi_i(x_1, ..., x_{k_i})$。由于$\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{A}_0$，$\mathfrak{A}_0 \models \exists x_1 ... \exists x_{k_i} ... \varphi_i(x_1, ..., x_{k_i})$。所以有$b_{i1}, ..., b_{ik_i} \in A_0$使得$\mathfrak{A}_0 \models \varphi_i[b_{i1}, ..., b_{ik_i}]$。将$c_{a_{i1}}, ..., c_{a_{ik_i}}$分别解释为$b_{i1}, ..., b_{ik_i}$，则$\mathfrak{A}_0$可膨胀为$\varphi_i\left(c_{a_{i1}}, ..., c_{a_{ik_i}}\right)$的模型。因为对$i \neq j$相应的$\mathcal{L}_{A_i}, \mathcal{L}_{A_j}$中的新常项不相交，$\mathfrak{A}_0$可同时膨胀为所有$\varphi_0, ..., \varphi_n$的模型。所以$\Gamma$有模型。所以$\Sigma$有模型。**证毕**。

定理 2.2.7 （*C&K3.1.5*）每个无穷模型有任意大的初等扩张。

证明：设$\mathfrak{A}$是一个无穷模型。$\mathfrak{A}$是理论$Th(\mathfrak{A})$的无穷模型。由向上的Löwenheim-Skolem-Tarski定理1.3.7，对任意充分大的基数α，$Th(\mathfrak{A})$有基数为α的模型$\mathfrak{B}$。$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$。由上命题，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$可初等嵌入同一模型$\mathfrak{C}$中。由$\|\mathfrak{B}\| = \alpha$显然$\|\mathfrak{C}\| \geq \alpha$，由$\mathfrak{A}$可初等嵌入于$\mathfrak{C}$可知，$\mathfrak{A}$有初等扩张同构于$\mathfrak{C}$，因此有基数$\alpha$。**证毕**。

定理 2.2.8 （*C&K3.1.6*）设α, β为基数，$\|\mathcal{L}\| \leq \beta \leq \alpha = \|\mathfrak{A}\|$，$X \subseteq A$，$|X| \leq \beta$，则有$\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$使得$X \subseteq B$且$|B| = \beta$。

证明：不妨设$|X| = \beta$。对$n = 0, 1, ...$，定义X_n如下：

（1）$X_0 = X$。

（2）设X_n已定义，对每个公式$\varphi(x, x_1, ..., x_p)$及每一组$a_1, ..., a_p \in X_n$，如$\mathfrak{A} \models \exists x \varphi[x, a_1, ..., a_p]$，选择一个$b \in A$使得$\mathfrak{A} \models \varphi[b, a_1, ..., a_p]$。令$X_{n+1}$为$X_n$加上所有这样的$b$所得。

由于$\|\mathcal{L}\| \leq \beta$，公式$\varphi$的个数为$\beta$，归纳可证，对$n = 0, 1, ...$，$|X_n| = \beta$。令$B = \cup_n X_n$，则$X \subseteq B$且$|B| = \beta$。设$F$是$\mathcal{L}$的$m$元函数符号，$m \geq 0$，$a_1, ..., a_m \in B$，则有$n$使得$a_1, ..., a_m \in X_n$，而且

$$\mathfrak{A} \models \exists x (F(x_1, ..., x_m) \equiv x)[a_1, ..., a_m] 。$$

所以由X_{n+1}的定义，有$b \in B$使得

$$\mathfrak{A} \models (F(x_1, ..., x_m) \equiv x)[a_1, ..., a_m, b] 。$$

因此$F^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_m) = b \in B$。即$B$在$\mathfrak{A}$的运算下封闭。所以有唯一的$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$使得$\mathfrak{B}$的个体域为$B$。对任何公式$\exists x \varphi(x, x_1, ..., x_p)$及任意$a_1, ..., a_p \in B$，有$n$使得$a_1, ..., a_p \in X_n$，所以，如$\mathfrak{A} \models \exists x \varphi[x, a_1, ..., a_p]$，则有$b \in X_{n+1} \subseteq B$使得$\mathfrak{A} \models \varphi[b, a_1, ..., a_p]$。所以由命题1.2.4，$\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$。**证毕**。

定理 2.2.9 （*C&K3.1.7*）设$\mathcal{L}$的理论T是一致的，只有无穷模型，且对某个基数$\alpha \geq \|\mathcal{L}\|$，$T$是$\alpha$范畴的，则$T$是完备的。

证明：只需证T的任何两个模型初等等价。设$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$是$T$的模型。由假设它们都无穷。由定理2.2.7，$\mathfrak{A}$有初等扩张$\mathfrak{A}'$使得$\|\mathfrak{A}'\| \geq \alpha$，再由上面的定理，$\mathfrak{A}'$有初等子模型$\mathfrak{A}^*$使得$\|\mathfrak{A}^*\| = \alpha$。$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}^*$。同理有$\mathfrak{B}^*$使得$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}^*$且$\|\mathfrak{B}^*\| = \alpha$。所以$\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*$是$T$的模型。由假设$T$是$\alpha$范畴的，所以$\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$。所以$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$。**证毕**。

推论 2.2.10 无端点稠密线性序理论Δ是完备的。

证明：显然Δ只有无穷模型。因此只要证Δ的任意两个可数模型$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$是同构的，此即证明，任意两个可数的无端点稠密线性序互相同构。设$A = \{a_0, a_1, ...\}$，$B = \{b_0, b_1, ...\}$。我们要将序列$a_0, a_1, ...$和序列$b_0, b_1, ...$重新排列成序列$a'_0, a'_1, ...$和序列$b'_0, b'_1, ...$，使得对任何i, j，$a'_i < a'_j$当且仅当$b'_i < b'_j$。则映射$a'_i \longmapsto b'_i$，$i = 0, 1, ...$，就是$\mathfrak{A}$与$\mathfrak{B}$的同构。为此，设已得到$a'_0, ..., a'_n$以及$b'_0, ..., b'_n$，且它们使得对任何$i, j \leq n$，$a'_i < a'_j$当且仅当$b'_i < b'_j$。取$a_0, a_1, ...$中第一个不出现于$a'_0, ..., a'_n$中的元素为a'_{n+1}。由$\mathfrak{B}$是无端点稠密线性序模型，以及$a'_i \longmapsto b'_i$，$i = 0, ...n$，已经是保序的，一定有$b'_{n+1} \in B$使得对任何$i \leq n$，$a'_i < a'_{n+1}$当且仅当$b'_i < b'_{n+1}$。再取$b_0, b_1, ...$中第一个不出现于$b'_0, ..., b'_{n+1}$中的元素为a'_{n+2}，同样可得对应的b'_{n+2}。依此即可得序列$a'_0, a'_1, ...$和序列$b'_0, b'_1, ...$，使得A中所有元素都在$a'_0, a'_1, ...$中，B中所有元素都在$b'_0, b'_1, ...$中，而且对任何i, j，$a'_i < a'_j$当且仅当$b'_i < b'_j$。**证毕**。

§2.3 模型链

设$\langle \mathfrak{A}_\beta : \beta < \lambda \rangle$是$\mathcal{L}$的模型的序列。称它为一个模型链，假如$\mathfrak{A}_\beta \subseteq \mathfrak{A}_\gamma$对任何$\beta < \gamma < \lambda$。此时，该模型链的并$\mathfrak{A} = \cup_{\beta<\lambda}\mathfrak{A}_\beta$定义为：$A = \cup_{\beta<\lambda}A_\beta$；对谓词符号$P$，$P^{\mathfrak{A}} = \cup_{\beta<\lambda}P^{\mathfrak{A}_\beta}$，对函数符号$F$，$F^{\mathfrak{A}} = \cup_{\beta<\lambda}F^{\mathfrak{A}_\beta}$；对常项符号$c$，$c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}_0}$。易证$F^{\mathfrak{A}}$确实是$A$上函数。

引理 2.3.1 （*C&K3.1.8*）$\mathcal{L}$的一个模型链$\langle \mathfrak{A}_\beta : \beta < \lambda \rangle$的并$\mathfrak{A} = \cup_{\beta<\lambda}\mathfrak{A}_\beta$还是$\mathcal{L}$的模型，而且$\mathfrak{A}_\beta \subseteq \mathfrak{A}$对任何$\beta < \lambda$。

证明：由定义，显然。**证毕**。

一个模型链$\langle \mathfrak{A}_\beta : \beta < \lambda \rangle$是一个初等链，假如$\mathfrak{A}_\beta \preccurlyeq \mathfrak{A}_\gamma$对任何$\beta < \gamma < \lambda$。

定理 2.3.2 （*C&K3.1.9*）对一个初等链$\langle \mathfrak{A}_\beta : \beta < \lambda \rangle$，有$\mathfrak{A}_\beta \preccurlyeq \cup_{\beta<\lambda}\mathfrak{A}_\beta$对任何$\beta < \lambda$。

证明：记$\mathfrak{A} = \cup_{\beta<\lambda}\mathfrak{A}_\beta$。对任意公式$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$归纳证明，对任何$\beta < \lambda$及任意$a_1, ..., a_n \in A_\beta$，

$$\mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_1, ..., a_n] \text{ iff. } \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]。$$

φ为原子公式、否定式、合取式的情形，由上面的引理，显然。设$\varphi(x_1, ..., x_n)$为存在式$\exists x\psi(x, x_1, ..., x_n)$。设$\mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_1, ..., a_n]$，则有$b \in A_\beta$使得$\mathfrak{A}_\beta \models \psi[b, a_1, ..., a_n]$。由归纳假设，$\mathfrak{A} \models \psi[b, a_1, ..., a_n]$。所以$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$。反之设$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$。因此有$b \in A$使得$\mathfrak{A} \models \psi[b, a_1, ..., a_n]$。有$\gamma < \lambda$使得$b \in A_\gamma$。不妨设$\gamma > \beta$。由

归纳假设，$\mathfrak{A}_\gamma \models \psi[b,a_1,...,a_n]$。所以$\mathfrak{A}_\gamma \models \varphi[a_1,...,a_n]$。由假设$\mathfrak{A}_\beta \preccurlyeq \mathfrak{A}_\gamma$。所以$\mathfrak{A}_\beta \models \varphi[a_1,...,a_n]$。**证毕**。

给定语言$\mathcal{L}$，对$n=0,1,...$，定义公式集Σ_n^0，Π_n^0如下：$\Sigma_0^0=\Pi_0^0=$开公式的集合；

$$\Sigma_{n+1}^0=\left\{\exists x_1...\exists x_m\varphi:\varphi\in\Pi_n^0\right\},$$
$$\Pi_{n+1}^0=\left\{\forall x_1...\forall x_m\varphi:\varphi\in\Sigma_n^0\right\}。$$

我们将逻辑等价的公式视为相同的。则易证$\Sigma_n^0,\Pi_n^0\subseteq\Sigma_{n+1}^0,\Pi_{n+1}^0$；$\varphi\in\Sigma_n^0$当且仅当$\neg\varphi\in\Pi_n^0$。

设$\mathcal{L}$的模型$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$。称$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{B}$的$\Sigma_n^0$子模型，或$\mathfrak{B}$是$\mathfrak{A}$的$\Sigma_n^0$扩张，假如对任何$\Sigma_n^0$公式$\varphi(x_1,...,x_m)$及$a_1,...,a_m\in A$，如$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_m]$，则$\mathfrak{B}\models\varphi[a_1,...,a_m]$。一个模型链$\langle\mathfrak{A}_\beta:\beta<\lambda\rangle$是一个$\Sigma_n^0$链，假如对任何$\beta<\gamma<\lambda$，$\mathfrak{A}_\beta$是$\mathfrak{A}_\gamma$的$\Sigma_n^0$子模型。易证$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$当且仅当$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{B}$的$\Sigma_0^0$子模型，又当且仅当$\mathfrak{A}$是$\mathfrak{B}$的$\Sigma_1^0$子模型。

定理 2.3.3 （*C&K3.1.10*）设$\langle\mathfrak{A}_\beta:\beta<\lambda\rangle$是一个$\Sigma_n^0$链，$\mathfrak{A}=\cup_{\beta<\lambda}\mathfrak{A}_\beta$，则

（*1*）$\mathfrak{A}_\beta$是$\mathfrak{A}$的Σ_n^0子模型；

（*2*）对任何Π_{n+1}^0公式$\varphi(x_1,...,x_m)$及$a_1,...,a_m\in A_\beta$，如$\mathfrak{A}_\gamma\models\varphi[a_1,...,a_m]$对任何$\gamma\geq\beta$，则$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_m]$；

（*3*）对任何Π_{n+1}^0语句φ，如$\mathfrak{A}_\beta\models\varphi$对任何$\beta$，则$\mathfrak{A}\models\varphi$。

证明：对n归纳同时证明（1）、（2）。

（1）$n=0$时显然。设$n>0$，$\varphi(x_1,...,x_m)\in\Sigma_n^0$，$a_1,...,a_m\in A_\beta$使得$\mathfrak{A}_\beta\models\varphi[a_1,...,a_m]$。设$\varphi(x_1,...,x_m)$为$\exists y_1...\exists y_p\psi(x_1,...,x_m,y_1,...,y_p)$，$\psi\in\Pi_{n-1}^0$。因此有$b_1,...,b_p\in A_\beta$使得$\mathfrak{A}_\beta\models\psi[a_1,...,a_m,b_1,...,b_p]$。由于$\langle\mathfrak{A}_\beta:\beta<\lambda\rangle$是一个$\Sigma_n^0$链，因此对$\gamma\geq\beta$，$\mathfrak{A}_\beta$应该是$\mathfrak{A}_\gamma$的$\Sigma_n^0$子模型。又由于$\psi\in\Sigma_n^0$，所以对$\gamma\geq\beta$，$\mathfrak{A}_\gamma\models\psi[a_1,...,a_m,b_1,...,b_p]$。$\psi\in\Pi_{n-1}^0\subseteq\Pi_n^0$，而由归纳假设，（2）对$n-1$成立，所以$\mathfrak{A}\models\psi[a_1,...,a_m,b_1,...,b_p]$。所以$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_m]$。所以$\mathfrak{A}_\beta$也是$\mathfrak{A}$的$\Sigma_n^0$子模型。

（2）设$\varphi(x_1,...,x_m)$为$\forall y_1...\forall y_p\chi(x_1,...,x_m,y_1,...,y_p)$，$\chi\in\Sigma_n^0$。任给$b_1,...,b_p\in A$。有$\gamma\geq\beta$使得$b_1,...,b_p\in A_\gamma$。由假设$\mathfrak{A}_\gamma\models\varphi[a_1,...,a_m]$。因此$\mathfrak{A}_\gamma\models\chi[a_1,...,a_m,b_1,...,b_p]$。由（1），$\mathfrak{A}\models\chi[a_1,...,a_m,b_1,...,b_p]$。$b_1,...,b_p$是任意的，所以$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_m]$。

（3）可由（2）直接得出。**证毕**。

下面是模型链的应用的一个例子。

引理 2.3.4 设$n>0$，$\mathcal{L}$的两模型$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$使得对任何$\Sigma_n^0$语句$\psi$有$\mathfrak{A}\models\psi$当且仅当$\mathfrak{B}\models\psi$，又设$\varphi$同时等价于一个$\Sigma_{n+1}^0$语句和一个$\Pi_{n+1}^0$语句，则$\mathfrak{A}\models\varphi$当且仅当$\mathfrak{B}\models\varphi$。

证明：我们要构造Σ_n^0链

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{B}_0\subseteq\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{B}_1\subseteq...,$$

使得$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}_0\equiv\mathfrak{A}_1\equiv\ldots$，$\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{B}_0\equiv\mathfrak{B}_1\equiv\ldots$。设$\mathfrak{A}_k$已构造。令

$$T=\left\{\psi:\psi\text{为}\mathcal{L}_{A_k}\text{的}\Sigma_n^0\text{语句且}\left(\mathfrak{A}_k\right)_{A_k}\models\psi\right\}\text{。}$$

设$\psi\left(c_{a_1},\ldots\right)\in T$，其中$\psi\left(x_1,\ldots\right)$为$\mathcal{L}$的公式，$c_{a_1},\ldots$为$\psi$中的所有新常项。则$\mathfrak{A}_k\models\exists x_1\ldots\psi\left(x_1,\ldots\right)$。由假设已有$\mathfrak{A}_k\equiv\mathfrak{A}$，所以$\mathfrak{A}\models\exists x_1\ldots\psi\left(x_1,\ldots\right)$。又由假设$n>0$，$\exists x_1\ldots\psi\left(x_1,\ldots\right)$也是$\Sigma_n^0$语句，所以$\mathfrak{B}\models\exists x_1\ldots\psi\left(x_1,\ldots\right)$。所以$\psi\left(c_{a_1},\ldots\right)$与理论$Th\left(\mathfrak{B}\right)$一致。$T$在有限合取下封闭，所以$T$与$Th\left(\mathfrak{B}\right)$一致。设$\mathcal{L}_{A_k}$的模型$\mathfrak{B}_k'$使得$\mathfrak{B}_k'\models Th\left(\mathfrak{B}\right)\cup T$。由$\mathfrak{B}_k'\models T$，可取$\mathfrak{B}_k'$使得$\mathfrak{B}_k=\mathfrak{B}_k'|\mathcal{L}$是模型$\mathfrak{A}_k$的$\Sigma_n^0$扩张。由$\mathfrak{B}_k'\models Th\left(\mathfrak{B}\right)$则有$\mathfrak{B}_k\equiv\mathfrak{B}$。同理可构造$\mathfrak{A}_{k+1}$。

显然$\cup_k\mathfrak{A}_k=\cup_k\mathfrak{B}_k$。现假设$\varphi$同时等价于一个$\Sigma_{n+1}^0$语句和一个$\Pi_{n+1}^0$语句，而$\mathfrak{A}\models\varphi$当且仅当$\mathfrak{B}\models\varphi$不成立。不妨设$\mathfrak{A}\models\varphi$但是$\mathfrak{B}\models\neg\varphi$。$\varphi,\neg\varphi$都等价于一个$\Pi_{n+1}^0$语句。由$\mathfrak{A}_k,\mathfrak{B}_k$的构造，$\mathfrak{A}_k\models\varphi$，$\mathfrak{B}_k\models\neg\varphi$对所有$k$。所以由上面定理的（3），应有$\cup_k\mathfrak{A}_k\models\varphi$，$\cup_k\mathfrak{B}_k\models\neg\varphi$。与$\cup_k\mathfrak{A}_k=\cup_k\mathfrak{B}_k$矛盾。**证毕**。

定理 2.3.5（*C&K3.1.11*）设$n>0$，则φ同时等价于一个Σ_{n+1}^0语句和一个Π_{n+1}^0语句，当且仅当φ等价于一些Σ_n^0语句的布尔组合。

证明: 充分性显然。反之设φ同时等价于一个Σ_{n+1}^0语句和一个Π_{n+1}^0语句，但φ不等价于任何Σ_n^0语句的布尔组合。先证明

（a）对任意有限个Σ_n^0语句$\sigma_1,\ldots,\sigma_m$，有一个$\sigma=\sigma_1'\wedge\ldots\wedge\sigma_m'$，其中每个$\sigma_i'$是$\sigma_i$或$\neg\sigma_i$，使得$\{\sigma,\varphi\}$和$\{\sigma,\neg\varphi\}$都一致。

证明: 设不然，则对每个这样的$\sigma=\sigma_1'\wedge\ldots\wedge\sigma_m'$有$\vdash\sigma\to\neg\varphi$或者$\vdash\sigma\to\varphi$。令$\psi=\vee\left\{\sigma:\sigma\text{如上且}\vdash\sigma\to\varphi\right\}$。（$\vee\varnothing$理解为矛盾式$\perp$。）则$\vdash\psi\to\varphi$。可证明$\vdash\varphi\to\psi$：设$\mathfrak{A}\models\varphi$。必有一个$\sigma$使得$\mathfrak{A}\models\sigma$。所以$\mathfrak{A}\not\models\sigma\to\neg\varphi$，只能有$\vdash\sigma\to\varphi$。所以$\sigma$是析取式$\psi$中的一个析取支。所以$\mathfrak{A}\models\psi$。所以$\vdash\varphi\to\psi$得证。所以$\vdash\varphi\leftrightarrow\psi$，即$\varphi$等价于一些$\Sigma_n^0$语句的布尔组合$\psi$，与假设矛盾。**证毕**。

其次证明

（b）设L为由φ中出现的非逻辑符号组成的语言，$\sigma_1,\sigma_2,\ldots$为L的所有Σ_n^0语句，则有一集合$\Sigma=\{\sigma_1',\sigma_2',\ldots\}$，其中每个$\sigma_i'$是$\sigma_i$或$\neg\sigma_i$，使得语句集$\Sigma\cup\{\varphi\}$和语句集$\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$都一致。

证明：对任一0-1序列$h=(h_1,\ldots,h_m)$，令$\Sigma_h=\{\sigma_1',\ldots\sigma_m'\}$，其中$h_i=0$时令$\sigma_i'$为$\sigma_i$，否则令$\sigma_i'$为$\neg\sigma_i$。显然，如果$h'\subseteq h$，则有$\Sigma_{h'}\subseteq\Sigma_h$。由（a），对任意$m>0$，有长度为$m$的序列$h$使得$\Sigma_h\cup\{\varphi\}$和$\Sigma_h\cup\{\neg\varphi\}$都一致。构造0-1序列$h_1,h_2,\ldots$如下：设已构造$h_1,\ldots,h_m$使得$h=(h_1,\ldots,h_m)$可扩张为任意长的序列$h'$使得$\Sigma_{h'}\cup\{\varphi\}$，$\Sigma_{h'}\cup\{\neg\varphi\}$都一致，则$(h_1,\ldots,h_m,0)$，$(h_1,\ldots,h_m,1)$中至少有一个也可扩张为任意长的序列$h'$使得$\Sigma_{h'}\cup\{\varphi\}$，$\Sigma_{h'}\cup\{\neg\varphi\}$都一致，取它为$(h_1,\ldots,h_m,h_{m+1})$。则对$h_1,h_2,\ldots$的每个有限子序列$h=(h_1,\ldots,h_m)$，$\Sigma_h\cup\{\varphi\}$，$\Sigma_h\cup\{\neg\varphi\}$都一致。令$\Sigma=\Sigma_{h_1,h_2,\ldots}$，则$\Sigma\cup\{\varphi\}$，$\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$都一致。**证毕**。

回到定理的证明。由结论（b），有模型$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$使得$\mathfrak{A}\models\Sigma\cup\{\varphi\}$，$\mathfrak{B}\models\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$。由$\mathfrak{A}\models\Sigma$，$\mathfrak{B}\models\Sigma$可知，对每个$\Sigma_n^0$语句$\sigma_i$，$\mathfrak{A}\models\sigma_i$当且仅当$\mathfrak{B}\models\sigma_i$。由假

设φ同时等价于一个Σ^0_{n+1}语句和一个Π^0_{n+1}语句，因此由上面的引理应有$\mathfrak{A}\models\varphi$当且仅当$\mathfrak{B}\models\varphi$，与$\mathfrak{A}\models\Sigma\cup\{\varphi\}$，$\mathfrak{B}\models\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$矛盾。**证毕**。

§2.4 超积

设I为一个指标集，$\mathcal{P}(I)$为I的幂集。I上一个**滤子**（filter）指一个$D\subseteq\mathcal{P}(I)$使得：

（1）$I\in D$；

（2）如$X,Y\in D$，则$X\cap Y\in D$；

（3）如$X\in D$且$X\subseteq Y\subseteq I$，则$Y\in D$。

D称为一个**真滤子**（proper filter），假如$D\neq\mathcal{P}(I)$。显然，一个滤子D是真滤子，当且仅当$\varnothing\notin D$。易证，一些滤子的交还是滤子。

例 2.4.1 $D=\{I\}$和$D=\mathcal{P}(I)$都是I上滤子。给定$Y\subseteq I$，$D=\{X\subseteq I:Y\subseteq X\}$是$I$上滤子，称为由$Y$生成的主滤子。$D=\{X\subseteq I:I-X\text{是有限集}\}$是$I$上滤子，称为$I$上的余有穷滤子，或*Fréchet*滤子。

推论 2.4.1 对任意$E\subseteq\mathcal{P}(I)$，

$$D=\{X\subseteq I:X=I\text{或有}Y_1,...,Y_n\in E\text{使得}Y_1\cap...\cap Y_n\subseteq X\}$$

是I上滤子，且是包含E的最小滤子。

证明：（1）$I\in D$。（2）设$X,Y\in D$，则有$Y_1,...,Y_n,Z_1,...,Z_m\in E$使得$Y_1\cap...\cap Y_n\subseteq X$，$Z_1\cap...\cap Z_m\subseteq Y$，所以$Y_1\cap...\cap Z_m\subseteq X\cap Y$，所以$X\cap Y\in D$。（3）由$D$的定义，显然。所以$D$是$I$上滤子。

设D^*是I上滤子且$E\subseteq D^*$要证$D\subseteq D^*$。显然，$I\in D^*$。设$Y_1,...,Y_n\in E$且$Y_1\cap...\cap Y_n\subseteq X$。则$Y_1,...,Y_n\in D^*$，所以$Y_1\cap...\cap Y_n\in D^*$，所以$X\in D^*$。所以$D\subseteq D^*$。**证毕**。

这个推论中的D称为由E生成的滤子。称$E\subseteq\mathcal{P}(I)$具有**有限交性质**，假如E中任意有限个集合的交非空。显然

命题 2.4.2 （*C&K4.1.1*）$E\subseteq\mathcal{P}(I)$具有有限交性质，当且仅当E生成真滤子。

例 2.4.2 设J是一个无穷集，$I=\mathcal{P}_\omega(J)=\{W\subseteq J:W\text{是有限集}\}$，即$J$的有限子集的集合，

$$D=\{X\subseteq I:\text{对某个}W\in I,\ \forall U\,(W\subseteq U\wedge U\in I\rightarrow U\in X)\},$$

即$X\in D$当且仅当X包含J的某个有限子集的所有有限扩张作为元素。可证D是I上滤子，且是I上真滤子。

I上一个**超滤子**（ultrafilter）D指I上一个滤子，使得对任何$X\in\mathcal{P}(I)$，$X\in D$当且仅当$I-X\notin D$。显然，对超滤子D，$\varnothing\notin D$，所以D是真滤子。易证，D是超滤子，当且仅当D是真滤子，且对任何$X\in\mathcal{P}(I)$，$X\in D$或$I-X\in D$。

命题 2.4.3 （*C&K4.1.2*）D是I上超滤子，当且仅当D是I上极大真滤子。

证明: 必要性: 设D是I上超滤子，设I上滤子F使得$D \subsetneq F$。设$X \in F-D$。由$X \notin D$应有$I-X \in D$。所以$I-X \in F$，所以$\varnothing = X \cap (I-X) \in F$，即$F$不是真滤子。所以$D$是$I$上极大真滤子。

充分性: 设D是I上极大真滤子。所以$\varnothing \notin D$。任给$X \in \mathcal{P}(I)$。设$X \in D$，显然$I-X \notin D$，因为否则$\varnothing = X \cap (I-X) \in D$。又设$I-X \notin D$。因为$D$是$I$上极大真滤子，所以$D \cup \{I-X\}$生成的滤子不是真滤子，所以它不具有有限交性质。因此有$Y \in D$使得$Y \cap (I-X) = \varnothing$。所以$Y \subseteq X$，因此$X \in D$。所以$X \in D$当且仅当$I-X \notin D$。所以$D$是$I$上超滤子。**证毕**。

命题 2.4.4 （*C&K4.1.3*）如$E \subseteq \mathcal{P}(I)$具有有限交性质，则有超滤子$D \supseteq E$。

证明: 令$\mathcal{E} = \{D : D\text{为}I\text{上真滤子，且}D \supseteq E\}$。由上面的命题知$\mathcal{E}$非空。先证明

（a）$\mathcal{E}$中非空链的并还在$\mathcal{E}$中。

证明: 设$\mathcal{F}$是$\mathcal{E}$中非空链，令$F = \cup\mathcal{F}$。只需证F为I上真滤子。对任何$D \in \mathcal{F}$，$\varnothing \notin D$。所以$\varnothing \notin F$。设$X, Y \in F$，则有$D, D' \in \mathcal{F}$使得$X \in D$，$Y \in D'$。因为$\mathcal{F}$是$\mathcal{E}$中的链，不妨设$D \subseteq D'$。所以$X, Y \in D'$。所以$X \cap Y \in D'$。所以$X \cap Y \in F$。又设$X \in F$，$X \subseteq Y \subseteq I$，则有$D \in \mathcal{F}$使得$X \in D$，所以$Y \in D$，所以$Y \in F$。所以$F$为$I$上真滤子。**证毕**。

回到命题的证明。由Zorn引理，$\mathcal{E}$中有极大元D。显然$D \supseteq E$且是I上极大真滤子。所以$D \supseteq E$且是I上超滤子。**证毕**。

推论 2.4.5 （*C&K4.1.4*）任何真滤子可扩张为超滤子。

设对$i \in I$有集合$A_i \neq \varnothing$。定义卡氏积

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : (f : I \to \cup_{i \in I} A_i)\text{，且对}i \in I\text{，}f(i) \in A_i \right\}\text{。}$$

设D为I上真滤子，对$f, g \in \prod_{i \in I} A_i$，定义

$$f =_D g \text{ iff. } \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D\text{。}$$

易证$=_D$是$\prod_{i \in I} A_i$上的等价关系。对$f \in \prod_{i \in I} A_i$，定义

$$f_D = \left\{ g \in \prod_{i \in I} A_i : f =_D g \right\}\text{。}$$

集合A_i，$i \in I$，的模D**归约积**（reduced product）定义为

$$\prod_D A_i = \left\{ f_D : f \in \prod_{i \in I} A_i \right\}\text{。}$$

D为I上超滤子时$\prod_D A_i$称为**超积**（ultraproduct）。$A_i = A$对所有$i \in I$时，称$\prod_D A$为**归约幂**（reduced power）或**超幂**（ultrapower）。

设对$i\in I$每个$\mathfrak{A}_i$是$\mathcal{L}$的模型，D为I上真滤子。归约积$\mathfrak{A}=\prod_D\mathfrak{A}_i$作为$\mathcal{L}$的模型定义如下：$\mathfrak{A}$的个体域为$A=\prod_D A_i$；对$\mathcal{L}$的$n$元谓词符号$P$，以及$f_D^1,...,f_D^n\in A$，

$$P^{\mathfrak{A}}\left(f_D^1,...,f_D^n\right)\text{ iff. }\left\{i\in I:P^{\mathfrak{A}_i}\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\}\in D;$$

对$\mathcal{L}$的n元函数符号F，以及$f_D^1,...,f_D^n\in A$，

$$F^{\mathfrak{A}}\left(f_D^1,...,f_D^n\right)=g_D\text{，其中对}i\in I\text{，}$$
$$g(i)=F^{\mathfrak{A}_i}\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\text{；}$$

对$\mathcal{L}$的常项符号c，

$$c^{\mathfrak{A}}=\left\langle c^{\mathfrak{A}_i}:i\in I\right\rangle_D\text{。}$$

以下命题说明以上定义与$=_D$的等价类中的元素的选择无关，因此是合理的。

命题 2.4.6 （*C&K4.1.7*）设$f^1=_D g^1,...,f^n=_D g^n$，$f^1,g^1,...,f^n,g^n\in\prod_{i\in I}A_i$，则

$$\left\{i\in I:P^{\mathfrak{A}_i}\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\}\in D\textit{ iff. }\left\{i\in I:P^{\mathfrak{A}_i}\left(g^1(i),...,g^n(i)\right)\right\}\in D;$$
$$\left\langle F^{\mathfrak{A}_i}\left(f^1(i),...,f^n(i)\right):i\in I\right\rangle=_D\left\langle F^{\mathfrak{A}_i}\left(g^1(i),...,g^n(i)\right):i\in I\right\rangle\text{。}$$

证明：对$k=1,...,n$，令$X_k=\left\{i\in I:f^k(i)=g^k(i)\right\}$。由$f^k=_D g^k$，有$X_k\in D$。令$X=X_1\cap...\cap X_n$，则$X\in D$，且对$i\in X$，$\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)=\left(g^1(i),...,g^n(i)\right)$。因此

$$\left\{i\in I:P^{\mathfrak{A}_i}\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\}\cap X=\left\{i\in I:P^{\mathfrak{A}_i}\left(g^1(i),...,g^n(i)\right)\right\}\cap X\text{，}$$
$$X\subseteq\left\{i\in I:F^{\mathfrak{A}_i}\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)=F^{\mathfrak{A}_i}\left(g^1(i),...,g^n(i)\right)\right\}\text{。}$$

所以，

$$\text{如}\left\{i\in I:P^{\mathfrak{A}_i}\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\}\in D\text{，}$$
$$\text{则}\left\{i\in I:P^{\mathfrak{A}_i}\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)\right\}\cap X\in D\text{，}$$
$$\text{所以}\left\{i\in I:P^{\mathfrak{A}_i}\left(g^1(i),...,g^n(i)\right)\right\}\cap X\in D\text{，}$$
$$\text{所以}\left\{i\in I:P^{\mathfrak{A}_i}\left(g^1(i),...,g^n(i)\right)\right\}\in D\text{。}$$

反之亦然。而且，

$$\left\{i\in I:F^{\mathfrak{A}_i}\left(f^1(i),...,f^n(i)\right)=F^{\mathfrak{A}_i}\left(g^1(i),...,g^n(i)\right)\right\}\in D\text{。}$$

所以结论成立。**证毕**。

定理 2.4.7 （*C&K4.1.8*）设$\mathcal{L}\subseteq\mathcal{L}'$，且对$i\in I$，$\mathfrak{A}_i$是语言$\mathcal{L}$的模型，$\mathfrak{B}_i$是模型$\mathfrak{A}_i$到语言$\mathcal{L}'$上的膨胀，$D$为$I$上真滤子，则归约积$\prod_D\mathfrak{B}_i$是归约积$\prod_D\mathfrak{A}_i$到语言$\mathcal{L}'$上的膨胀。

证明：由假设，$A_i = B_i$对所有$i \in I$。所以，$\prod_{i\in I} A_i = \prod_{i\in I} B_i$。所以，$\prod_D A_i = \prod_D B_i$。对$\mathcal{L}$的一个非逻辑符号，它在$\prod_D \mathfrak{A}_i$或者$\prod_D \mathfrak{B}_i$中的解释依赖于$\prod_D A_i = \prod_D B_i$，$D$，及该符号在每个$\mathfrak{A}_i$或者$\mathfrak{B}_i$中的解释。所以它在$\prod_D \mathfrak{A}_i$或者$\prod_D \mathfrak{B}_i$中的解释相同。所以，归约积$\prod_D \mathfrak{B}_i$是归约积$\prod_D \mathfrak{A}_i$的膨胀。**证毕。**

定理 2.4.8 （**超积基本定理**，*C&K4.1.9*）设$\mathfrak{A} = \prod_D \mathfrak{A}_i$是超积，则

（*1*）对项$t(x_1,...,x_n)$以及$f_D^1,...,f_D^n \in A$，

$$t^{\mathfrak{A}}\left[f_D^1,...,f_D^n\right] = \left\langle t^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right] : i \in I\right\rangle_D;$$

（*2*）对公式$\varphi(x_1,...,x_n)$以及$f_D^1,...,f_D^n \in A$，

$$\mathfrak{A} \models \varphi\left[f_D^1,...,f_D^n\right] \ \textit{iff.}\ \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\left[f^1(i),...,f^n(i)\right]\right\} \in D;$$

（*3*）对语句φ，$\mathfrak{A} \models \varphi$ *iff.* $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in D$。

证明：（1）对t归纳。如t是变元x_k，则左边$= t^{\mathfrak{A}}\left[f_D^1,...,f_D^n\right] = f_D^k$，而

$$\text{右边} = \left\langle t^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right] : i \in I\right\rangle_D = \left\langle f^k(i) : i \in I\right\rangle_D = f_D^k,$$

所以成立。如t是常项c，则右边$= \left\langle c^{\mathfrak{A}_i} : i \in I\right\rangle_D = c^{\mathfrak{A}} =$左边，所以成立。如$t$是$F(t_1,...,t_m)$，则

$$\begin{aligned}\text{左边} &= F^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{A}}\left[f_D^1,...,f_D^n\right],...t_m^{\mathfrak{A}}\left[f_D^1,...,f_D^n\right]\right)\\ &= F^{\mathfrak{A}}\left(\left\langle t_1^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right] : i \in I\right\rangle_D,...\left\langle t_m^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right] : i \in I\right\rangle_D\right)\\ &= \left\langle F^{\mathfrak{A}_i}\left(t_1^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right],...t_m^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right]\right) : i \in I\right\rangle\\ &= \left\langle t^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right] : i \in I\right\rangle_D,\end{aligned}$$

所以成立。

（2）对φ归纳。如φ是$P(t_1,...,t_m)$，则

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A} \models \varphi\left[f_D^1,...,f_D^n\right]\\ &\Leftrightarrow P^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{A}}\left[f_D^1,...,f_D^n\right],...t_m^{\mathfrak{A}}\left[f_D^1,...,f_D^n\right]\right)\\ &\Leftrightarrow P^{\mathfrak{A}}\left(\left\langle t_1^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right] : i \in I\right\rangle_D,...,\left\langle t_m^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right] : i \in I\right\rangle_D\right)\\ &\Leftrightarrow \left\{i \in I : P^{\mathfrak{A}_i}\left(t_1^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right],...,t_m^{\mathfrak{A}_i}\left[f^1(i),...,f^n(i)\right]\right)\right\} \in D\\ &\Leftrightarrow \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\left[f^1(i),...,f^n(i)\right]\right\} \in D,\end{aligned}$$

所以成立。如φ是$\neg\psi$，则

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A} \models \varphi\left[f_D^1,...,f_D^n\right]\\ &\Leftrightarrow \text{并非}\mathfrak{A} \models \psi\left[f_D^1,...,f_D^n\right]\\ &\Leftrightarrow \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi\left[f^1(i),...,f^n(i)\right]\right\} \notin D\\ &\Leftrightarrow I - \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi\left[f^1(i),...,f^n(i)\right]\right\} \in D\text{（因为}D\text{是超滤子）}\\ &\Leftrightarrow \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \neg\psi\left[f^1(i),...,f^n(i)\right]\right\} \in D,\end{aligned}$$

所以成立。如φ是$\psi_1 \wedge \psi_2$，因为

$$\begin{aligned}&\left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\left[f^1(i), ..., f^n(i)\right]\right\}\\&= \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi_1\left[f^1(i), ..., f^n(i)\right]\right\} \cap \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi_2\left[f^1(i), ..., f^n(i)\right]\right\},\end{aligned}$$

显然。最后设φ是$\exists y \psi(y, x_1, ..., x_n)$。设$\mathfrak{A} \models \varphi\left[f_D^1, ..., f_D^n\right]$。所以有$g_D \in A$使得$\mathfrak{A} \models \psi\left[g_D, f_D^1, ..., f_D^n\right]$。由归纳假设，

$$\left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi\left[g(i), f^1(i), ..., f^n(i)\right]\right\} \in D,$$

所以

$$\left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \exists y \psi\left[y, f^1(i), ..., f^n(i)\right]\right\} \in D,$$

即

$$\left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\left[f^1(i), ..., f^n(i)\right]\right\} \in D。$$

反之设$\left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\left[f^1(i), ..., f^n(i)\right]\right\} \in D$。对$i \in I$使得$\mathfrak{A}_i \models \varphi\left[f^1(i), ..., f^n(i)\right]$，可选择$g(i)$使得$\mathfrak{A}_i \models \psi\left[g(i), f^1(i), ..., f^n(i)\right]$。对其它$i$任意定义$g(i)$。则

$$\left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi\left[g(i), f^1(i), ..., f^n(i)\right]\right\} \in D。$$

所以由归纳假设，$\mathfrak{A} \models \psi\left[g_D, f_D^1, ..., f_D^n\right]$，所以$\mathfrak{A} \models \varphi\left[f_D^1, ..., f_D^n\right]$。**证毕**。

推论 2.4.9 （*C&K4.1.10*）对超幂有$\prod_D \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}$。

作为超积基本定理的一个应用，我们从它推导紧致性定理。注意，超积基本定理的证明不依赖于一阶逻辑的完全性定理。

推论 2.4.10 （**紧致性定理**，*C&K4.1.11*）设Σ是$\mathcal{L}$的一个语句集，$I = \mathcal{P}_\omega(\Sigma) = \Sigma$的有限子集的集合，对每个$i \in I$有模型$\mathfrak{A}_i \models i$，则有$I$上超滤子$D$使得$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \Sigma$。

证明：由超积基本定理，要使得$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \Sigma$，即对每个$\sigma \in \Sigma$，$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \sigma$，只要对每个$\sigma \in \Sigma$，$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \sigma\} \in D$。因为$\mathfrak{A}_i \models i$，所以$\mathfrak{A}_i \models \sigma$对$\sigma \in i$。所以只要对每个$\sigma \in \Sigma$，$\{i \in I : \sigma \in i\} \in D$。因为

$$\{i \in I : \sigma_1 \in i\} \cap ... \cap \{i \in I : \sigma_n \in i\} = \{i \in I : \sigma_1, ..., \sigma_n \in i\} \neq \varnothing,$$

所以$\{\{i \in I : \sigma \in i\} : \sigma \in \Sigma\} \subseteq \mathcal{P}(I)$具有有限交性质。所以$\{\{i \in I : \sigma \in i\} : \sigma \in \Sigma\}$可扩张为一个$I$上超滤子$D$。这个超滤子$D$就使得$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \Sigma$。**证毕**。

设K是$\mathcal{L}$的模型的一个类。称K对初等等价封闭，假如对$\mathcal{L}$的任何模型$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$，如$\mathfrak{A} \in K$而且$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，则$\mathfrak{B} \in K$。称$K$对超积封闭，假如对$I$上超滤子$D$，$\mathfrak{A}_i \in K$对所有$i \in I$蕴涵$\prod_D \mathfrak{A}_i \in K$。

定理 2.4.11 （*C&K4.1.12*）设K是$\mathcal{L}$的模型的一个类。

（*1*）K是初等类，当且仅当K对超积和初等等价封闭。

（*2*）K是基本初等类，当且仅当K与K的补都对超积和初等等价封闭。

证明：（1）必要性显然。为证充分性，设K对超积和初等等价封闭。令

$$T=\{\varphi:\varphi\text{是语句且对所有}\mathfrak{A}\in K\text{有}\mathfrak{A}\models\varphi\}\text{。}$$

显然，$\mathfrak{A}\in K$蕴涵$\mathfrak{A}\models T$。因此只要证$\mathfrak{A}\models T$蕴涵$\mathfrak{A}\in K$。为此设$\mathfrak{A}\models T$。令$\Sigma=Th(\mathfrak{A})$，$I=\mathcal{P}_\omega(\Sigma)$。对$i=\{\sigma_1,...,\sigma_n\}\in I$，可证$i$有模型$\mathfrak{A}_i\in K$。如不然，则对任何$\mathfrak{B}\in K$，有$\sigma_i$使得$\mathfrak{B}\nvDash\sigma_i$，因此$\mathfrak{B}\models\neg(\sigma_1\wedge...\wedge\sigma_n)$，所以$\neg(\sigma_1\wedge...\wedge\sigma_n)\in T$，所以$\mathfrak{A}\models\neg(\sigma_1\wedge...\wedge\sigma_n)$，与$\sigma_1,...,\sigma_n\in\Sigma$矛盾。所以模型有$\mathfrak{A}_i\in K$使得$\mathfrak{A}_i\models i$。由上面的推论，有超积$\prod_D\mathfrak{A}_i\models\Sigma$。由假设$K$对超积封闭，所以$\prod_D\mathfrak{A}_i\in K$。又由$\prod_D\mathfrak{A}_i\models\Sigma$，有$\prod_D\mathfrak{A}_i\equiv\mathfrak{A}$。由假设$K$对初等等价封闭，所以$\mathfrak{A}\in K$。所以$\mathfrak{A}\models T$蕴涵$\mathfrak{A}\in K$。所以$K$是$T$的模型类，即$K$是初等类。

（2）只要证K是基本初等类，当且仅当K与K的补$\overline{K}$都是初等类。设K是基本初等类。设$K=\{\mathfrak{A}:\mathfrak{A}\models\varphi\}$对某个语句$\varphi$，则$\overline{K}=\{\mathfrak{A}:\mathfrak{A}\models\neg\varphi\}$。所以$\overline{K}$也是初等类。反之设$K$与$K$的补$\overline{K}$都是初等类。因此有理论$T,S$使得$K=\{\mathfrak{A}:\mathfrak{A}\models T\}$，$\overline{K}=\{\mathfrak{A}:\mathfrak{A}\models S\}$。因此理论$T\cup S$没有模型。由紧致性定理，有有限个语句$\varphi_1,...,\varphi_n\in T$，$\psi_1,...,\psi_m\in S$使得$\{\varphi_1,...,\varphi_n,\psi_1,...,\psi_m\}$无模型。易证$K=\{\mathfrak{A}:\mathfrak{A}\models\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n\}$，即$K$是基本初等类。**证毕**。

设$\prod_D\mathfrak{A}$是一个超幂。自然嵌入$d:\mathfrak{A}\to\prod_D\mathfrak{A}$定义为：对$a\in A$，$d(a)=\langle a:i\in I\rangle_D$。

推论 2.4.12 （*C&K4.1.13*）$d:\mathfrak{A}\preccurlyeq\prod_D\mathfrak{A}$。

证明：对任意公式$\varphi(x_1,...,x_n)$，$a_1,...,a_n\in A$，要证

$$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]\ \text{iff.}\ \prod_D\mathfrak{A}\models\varphi[d(a_1),...,d(a_n)]\text{。}$$

设$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$，则

$$\{i\in I:\mathfrak{A}\models\varphi[d(a_1)(i),...,d(a_n)(i)]\}=\{i\in I:\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]\}=I\in D,$$

所以由超积基本定理，$\prod_D\mathfrak{A}\models\varphi[d(a_1),...,d(a_n)]$。反之，如$\mathfrak{A}\nvDash\varphi[a_1,...,a_n]$，则可得

$$\{i\in I:\mathfrak{A}\models\varphi[d(a_1)(i),...,d(a_n)(i)]\}=\varnothing\notin D,$$

所以$\prod_D\mathfrak{A}\nvDash\varphi[d(a_1),...,d(a_n)]$。**证毕**。

第三章　基本方法的一些应用

§3.1　省略型定理

用$\Sigma(x_1,...,x_n)$表示自由变元都在$x_1,...,x_n$的一些公式组成的集合。$\mathfrak{A}\models\Sigma[a_1,...,a_n]$相应地表示$\mathfrak{A}\models\sigma[a_1,...,a_n]$对所有$\sigma(x_1,...,x_n)\in\Sigma(x_1,...,x_n)$，它称为$a_1,...,a_n$在$\mathfrak{A}$中**满足或实现**（realize）$\Sigma(x_1,...,x_n)$。称模型$\mathfrak{A}$满足或实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$，假如有$a_1,...,a_n$在$\mathfrak{A}$中满足或实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$，否则称模型$\mathfrak{A}$**省略**（omit）$\Sigma(x_1,...,x_n)$。称$\Sigma(x_1,...,x_n)$可实现，假如某个模型$\mathfrak{A}$实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$。注意，假如$\Sigma(x_1,...,x_n)$中只有有限个公式，则$\mathfrak{A}$实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$当且仅当$\mathfrak{A}\models\exists x_1...\exists x_n\wedge\Sigma(x_1,...,x_n)$，其中$\wedge\Sigma(x_1,...,x_n)$表示$\Sigma(x_1,...,x_n)$中所有公式的合取，同样，$\mathfrak{A}$省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$当且仅当$\mathfrak{A}\models\neg\exists x_1...\exists x_n\wedge\Sigma(x_1,...,x_n)$。所以，$\Sigma(x_1,...,x_n)$有限的时候，$\mathfrak{A}$实现或省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$都可以用单个语句表达。另外，$\Sigma(x_1,...,x_n)$是无穷集的时候，取新常项符号$c_1,...,c_n$，则$\mathfrak{A}$实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$当且仅当$\mathfrak{A}$可膨胀为理论

$$\Sigma(c_1,...,c_n)=\{\sigma(c_1,...,c_n):\sigma(x_1,...,x_n)\in\Sigma(x_1,...,x_n)\}$$

的模型，所以$\Sigma(x_1,...,x_n)$是无穷集的时候，"$\mathfrak{A}$实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$"这个条件可以用一阶理论即无穷的语句集表达。但$\Sigma(x_1,...,x_n)$是无穷集的时候，"$\mathfrak{A}$省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$"这个条件一般不能表达为$\mathfrak{A}$满足单个语句或一个理论。$\wedge\Sigma(x_1,...,x_n)$将是无穷长公式，而"$\mathfrak{A}$不可膨胀为理论$\Sigma(c_1,...,c_n)$的模型"一般不能再表达为$\mathfrak{A}$可膨胀为某个理论的模型。所以，说$\mathfrak{A}$省略一个公式集$\Sigma(x_1,...,x_n)$是以新的方式表达关于一个模型的条件。就像完全性定理给出了一个理论T有一个满足它的模型的条件（即T是一致的），省略型定理给出了一个公式集$\Sigma(x_1,...,x_n)$有一个省略它的模型的条件。

下面的命题给出了一个理论T有一个模型实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$的条件。

命题 3.1.1 （*C&K2.2.7*）*设$\Sigma=\Sigma(x_1,...,x_n)$，$T$是一个理论，则如下等价:*

（1）T有一个模型实现Σ;

（2）Σ的每个有限子集被T的一个模型实现;

（3）$T\cup\{\exists x_1...\exists x_n(\sigma_1\wedge...\wedge\sigma_m):m<\omega,\sigma_1,...,\sigma_m\in\Sigma\}$一致。

证明：（1）⇒（2）显然。

（2）⇒（3）：设（2），只要证（3）中语句集的每个有限子集一致，即有模型，为此只要证$T\cup\{\exists x_1...\exists x_n(\sigma_1\wedge...\wedge\sigma_m)\}$有模型。由（2），$T$有一个模型$\mathfrak{A}$实现$\{\sigma_1(x_1,...,x_n),...,\sigma_m(x_1,...,x_n)\}$。显然$\mathfrak{A}\models T\cup\{\exists x_1...\exists x_n(\sigma_1\wedge...\wedge\sigma_m)\}$。

（3）⇒（1）：取新常项符号$c_1,...,c_n$。由（3）可得，$T\cup\{\sigma_1(c_1,...,c_n),...,\sigma_m(c_1,...,c_n)\}$一致。所以$T\cup\Sigma(c_1,...,c_n)$的每个有限子集一致。所以$T\cup\Sigma(c_1,...,c_n)$有模型$\mathfrak{A}$。显然$\mathfrak{A}$实现$\Sigma$。**证毕**。

称一个公式$\sigma(x_1,...,x_n)$**与一个理论T一致**，假如σ在T的一个模型中实现；称一个公式集$\Sigma(x_1,...,x_n)$与一个理论T一致，假如Σ在T的一个模型中实现。所以，$\sigma(x_1,...,x_n)$与T一致，当且仅当$T\cup\{\exists x_1...\exists x_n\sigma\}$一致；$\Sigma(x_1,...,x_n)$与$T$一致，当且仅当$T\cup\Sigma(c_1,...,c_n)$一致，其中$c_1,...,c_n$为新常项符号，又当且仅当

$$T\cup\{\exists x_1...\exists x_n(\sigma_1\wedge...\wedge\sigma_m):m<\omega,\sigma_1,...,\sigma_m\in\Sigma\}$$

一致。

称理论T**局部实现**（locally realize）公式集$\Sigma(x_1,...,x_n)$，假如有公式$\varphi(x_1,...,x_n)$使得，

（1）$\varphi(x_1,...,x_n)$与T一致，

（2）$T\models\varphi(x_1,...,x_n)\rightarrow\sigma(x_1,...,x_n)$，对所有$\sigma(x_1,...,x_n)\in\Sigma(x_1,...,x_n)$。

称T**局部省略**（locally omit）$\Sigma(x_1,...,x_n)$，假如T不局部实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$。所以，T局部省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$，当且仅当对任何$\varphi(x_1,...,x_n)$，假如$\varphi(x_1,...,x_n)$与T一致，则有$\sigma(x_1,...,x_n)\in\Sigma(x_1,...,x_n)$，使得$\varphi(x_1,...,x_n)\wedge\neg\sigma(x_1,...,x_n)$与$T$一致。显然，如$T$局部实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$，则$T$有一个模型实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$，反之，如$T$的所有模型省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$，则$T$局部省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$。

命题 3.1.2 （*C&K2.2.8*）*设T完备，T有一个模型省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$，则T局部省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$。*

证明: 设T完备，但T局部实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$，要证T的所有模型实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$。由假设有公式$\varphi(x_1,...,x_n)$使得$\varphi(x_1,...,x_n)$与T一致，且对所有$\sigma(x_1,...,x_n)\in\Sigma(x_1,...,x_n)$，$T\models\varphi(x_1,...,x_n)\rightarrow\sigma(x_1,...,x_n)$。所以$\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$与$T$一致。因$T$完备，有$T\models\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$。所以，任给$T$的一个模型$\mathfrak{A}$，有$\mathfrak{A}\models\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$，即有$a_1,...,a_n\in A$使得$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$。由于$T\models\varphi(x_1,...,x_n)\rightarrow\sigma(x_1,...,x_n)$对所有$\sigma(x_1,...,x_n)\in\Sigma(x_1,...,x_n)$，所以$\mathfrak{A}\models\sigma[a_1,...,a_n]$对所有$\sigma(x_1,...,x_n)\in\Sigma(x_1,...,x_n)$，即$\mathfrak{A}$实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$。所以$T$的所有模型实现$\Sigma(x_1,...,x_n)$。**证毕**。

定理 3.1.3 （**省略型定理**，*C&K2.2.9*）*设$\mathcal{L}$可数，$\mathcal{L}$的理论T是一致的，且T局部省略$\Sigma=\Sigma(x_1,...,x_n)$，则$T$有可数模型省略$\Sigma$。*

证明: 不妨设$\Sigma(x_1,...,x_n)$为$\Sigma(x)$。设T局部省略$\Sigma(x)$。取新常项符号集$C=\{c_0,c_1,c_2,...\}$，令$\mathcal{L}'=\mathcal{L}\cup C$。设$\varphi_0,\varphi_1,...$为$\mathcal{L}'$的所有语句。定义$T_0=T\subseteq T_1\subseteq T_2\subseteq...$如下：设$T_m$已定义，且为$T$的有限扩张，且一致，依如下步骤定义$T_{m+1}$：

（1）设$T_m=T\cup\{\theta_1,...,\theta_r\}$。记$\theta=\theta_1\wedge...\wedge\theta_r=\theta(c_0,...,c_k)$，其中$c_0,...,c_k$包含了$\theta$中实际出现的所有新常项。不妨设$k>m$。$r=0$时可取任何一个有效语句为$\theta$。记

$$\varphi(x_m)=\exists x_0...\exists x_{m-1}\exists x_{m+1}...\exists x_k\theta(x_0,...,x_k)\text{。}$$

由假设T_m一致，所以$T\cup\{\theta(c_0,...,c_k)\}$一致，所以$T\cup\{\exists x_m\varphi(x_m)\}$一致，即$\varphi(x_m)$与

理论T一致。由假设T局部省略$\Sigma(x)$，所以有$\sigma(x)\in\Sigma(x)$使得$\varphi(x_m)\wedge\neg\sigma(x_m)$也与$T$一致。所以$T\cup\{\theta(c_0,...,c_k)\wedge\neg\sigma(c_m)\}$一致，所以$T_m\cup\{\neg\sigma(c_m)\}$一致。令$T'_m=T_m\cup\{\neg\sigma(c_m)\}$。

（2）如φ_m具有形状$\exists y\psi(y)$，而且$T'_m\cup\{\varphi_m\}$一致，取一个不在$T'_m\cup\{\varphi_m\}$中出现的新常项c_p，则$T'_m\cup\{\varphi_m,\psi(c_p)\}$也一致，令$T''_m=T'_m\cup\{\varphi_m,\psi(c_p)\}$；否则，如$\varphi_m$不具有形状$\exists y\psi(y)$，或$T'_m\cup\{\varphi_m\}$不一致，则令$T''_m=T'_m$。

（3）要么$T''_m\cup\{\varphi_m\}$一致，要么$T''_m\cup\{\neg\varphi_m\}$一致。在前一情形，令$T_{m+1}=T''_m\cup\{\varphi_m\}$，在后一情形，令$T_{m+1}=T''_m\cup\{\neg\varphi_m\}$。

由定义，显然T_{m+1}也是T的有限扩张，且一致。令$T_\omega=\cup_m T_m$，则T_ω一致。由构造的第（3）步，T_ω完备。对任何一个形如$\exists y\psi(y)$的语句，设它为φ_m，如$T_\omega\vdash\varphi_m$，则必有$T'_m\cup\{\varphi_m\}$一致，因此由构造的第（2）步，有c_p使得$\psi(c_p)\in T_\omega$，因此$T_\omega\vdash\exists y\psi(y)\to\psi(c_p)$；如$T_\omega\vdash\neg\varphi_m$，则也有$T_\omega\vdash\exists y\psi(y)\to\psi(c_p)$。所以$T_\omega$以$C$为证据集。由完全性定理的证明，$T_\omega$有一个模型$\mathfrak{A}$其个体都是$C$中常项的解释。所以$\mathfrak{A}$是可数模型。由构造的第（1）步，对$C$中每个常项$c_m$，有$\sigma(x)\in\Sigma(x)$使得$\neg\sigma(c_m)\in T_\omega$。所以$\mathfrak{A}\models\neg\sigma(c_m)$。所以$c_m^{\mathfrak{A}}$不能实现$\Sigma(x)$。但$\mathfrak{A}$中每个个体都是某个$c_m^{\mathfrak{A}}$。所以$\mathfrak{A}$省略$\Sigma(x)$。**证毕**。

推论 3.1.4 *设$\mathcal{L}$可数，$\mathcal{L}$的理论T是完备的，则T有模型省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$，当且仅当T局部省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$。*

推论 3.1.5 *设$\mathcal{L}$可数，则$\mathcal{L}$的理论T有模型省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$，当且仅当T有完备扩张局部省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$。*

证明：设T有模型$\mathfrak{A}$省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$，则$Th(\mathfrak{A})$是T的完备扩张有模型$\mathfrak{A}$省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$，所以由上面的命题，$Th(\mathfrak{A})$局部省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$。反之设T有完备扩张T'局部省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$，由上面的定理，T'有模型$\mathfrak{A}$省略$\Sigma(x_1,...,x_n)$。$\mathfrak{A}$也是T的模型。**证毕**。

例 3.1.1 *考虑皮亚诺算术理论$\boldsymbol{PA}$的语言$\mathcal{L}_{PA}=\{0,S,+,\bullet\}$的公式集$\Sigma(x)=\{\neg x\equiv 0,\neg x\equiv\overline{1},\neg x\equiv\overline{2},...\}$。显然，对$\mathcal{L}_{PA}$的任何模型$\mathfrak{A}$以及$a\in A$，$\mathfrak{A}\models\Sigma[a]$当且仅当$a$是$\mathfrak{A}$中的非标准数。（回忆一下，条件（$x$是非标准数）不能用单个一阶公式表达。）$\mathcal{L}_{PA}$的一个模型$\mathfrak{A}$称为一个$\omega$-模型，假如它省略$\Sigma(x)$，即其中没有非标准数。$\mathcal{L}_{PA}$的理论$T$称为$\omega$-一致的，假如没有公式$\varphi(x)$使得$T\models\varphi(0)$，$T\models\varphi(\overline{1})$，$T\models\varphi(\overline{2})$，...，$T\models\exists x\neg\varphi(x)$。$T$称为$\omega$-完备的，假如对任何公式$\varphi(x)$，$T\models\varphi(0)$，$T\models\varphi(\overline{1})$，$T\models\varphi(\overline{2})$，...蕴涵$T\models\forall x\varphi(x)$。*

命题 3.1.6 *（C&K2.2.12）设$\mathcal{L}_{PA}$的理论T是一致的。*

（1）如T是ω-完备的，则T有ω-模型；

（2）如T有ω-模型，则T是ω-一致的。

证明：（1）设T是ω-完备的。由省略型定理，只要证T局部省略$\Sigma(x)$。为此设$\varphi(x)$与理论T一致，即$T\cup\{\exists x\varphi(x)\}$一致，所以$T\nvDash\forall x\neg\varphi(x)$。由$T$是$\omega$-完备的，有$\overline{n}$使得$T\nvDash\neg\varphi(\overline{n})$。所以$T\nvDash\varphi(\overline{n})\to\sigma(\overline{n})$，其中$\sigma(x)=(\neg x\equiv\overline{n})\in\Sigma(x)$，所以$T\nvDash\varphi(x)\to\sigma(x)$。所以$T$局部省略$\Sigma(x)$。

（2）显然。**证毕**。

例 3.1.2 设$\mathcal{L}_{ord} = \{\leq\}$为偏序语言，$T$是$\mathcal{L}_{ord}$的无端点稠密线性序理论。考虑有无穷多个自由变元的公式集$\Sigma(x_0, x_1, ...) = \{x_1 < x_0, x_2 < x_1, ...\}$。如$\mathfrak{A} = \langle A, \leq\rangle$为任意一个线性序模型，则$\mathfrak{A}$省略$\Sigma(x_0, x_1, ...)$当且仅当$\mathfrak{A}$是良序模型。$T$没有良序模型。所以$T$没有模型略$\Sigma(x_0, x_1, ...)$。但可证$T$局部省略$\Sigma(x_0, x_1, ...)$：设$\varphi(x_0, ..., x_n)$与理论$T$一致，所以有$T$的模型$\mathfrak{A}$以及$a_0, ..., a_n \in A$使得$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_n]$。任取$a_{n+1}, a_{n+2} \in A$使得$a_{n+1} < a_{n+2}$，则$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_n] \wedge \neg(x_{n+2} < x_{n+1})[a_{n+1}, a_{n+2}]$，即$\varphi(x_0, ..., x_n) \wedge \neg(x_{n+2} < x_{n+1})$也与$T$一致。所以$T$局部省略$\Sigma(x_0, x_1, ...)$。

以下是省略型定理的推广。

定理 3.1.7（**广义省略型定理**，*C&K2.2.15*）设$\mathcal{L}$可数，$\mathcal{L}$的理论T是一致的，且T局部省略每个$\Sigma_r = \Sigma_r(x_1, ..., x_{n_r})$对$r = 0, 1, 2, ...$，则$T$有一个可数模型省略所有$\Sigma_r$。

证明：对每个r，将新常项$c_0, c_1, c_2, ...$的所有n_r元组排列成$s_r^r, s_{r+1}^r, s_{r+2}^r, ...$。同前面的省略型定理3.1.3的证明，定义$T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq ...$，其中定义$T'_m$的步骤（1）再分成$m+1$小步：对$r = 0, ..., m$，在第$r$小步，由$T$局部省略$\Sigma_r$，可选择$\sigma \in \Sigma_r$使得将$\neg\sigma(s_m^r)$加入$T_m$的迄今为止的扩张还保持一致，将$\neg\sigma(s_m^r)$加入$T_m$的迄今为止的扩张，然后继续第$r+1$小步。结果所得的$T'_m$能够使得，对$r = 0, ..., m$，分别有$\sigma \in \Sigma_r$使得$\neg\sigma(s_m^r) \in T'_m$。$T''_m$与$T_{m+1}$的定义不变。这保证了在$T_\omega$的那个模型$\mathfrak{A}$中，个体的每个$n_r$元组都不满足$\Sigma_r$中的某个公式，因此$\mathfrak{A}$省略$\Sigma_r$。**证毕**。

§3.2 插值定理、Robinson一致性定理及可定义性定理

设$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$是两个语言，称$\mathcal{L}_1$的理论$T$与$\mathcal{L}_2$的理论$U$**不可分**，假如不存在语言$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$的语句$\theta$使得$T \models \theta$而且$U \models \neg\theta$。（如这样一个$\theta$存在，称它**分离**$T$与$U$。）显然，如$T$与$U$不可分，则$T$与$U$都一致（否则可取$\theta$为一个有效式或矛盾式）。而且，$T$与$U$不可分，当且仅当$T$的每个有限子集与$U$的每个有限子集不可分。

引理 3.2.1 设$\mathcal{L}_1$的理论T与$\mathcal{L}_2$的理论U不可分，则

（*1*）对$\mathcal{L}_1$的任何语句φ，或者$T \cup \{\varphi\}$与U不可分，或者$T \cup \{\neg\varphi\}$与U不可分；

（*2*）如$\mathcal{L}_1$的语句$\exists x\varphi(x)$使得$T \models \exists x\varphi(x)$，$c$是一个不出现于$T, U$中的新常项，则$T \cup \{\varphi(c)\}$也与$U$不可分；

（*3*）如C是一些不属于$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$的新常项的集合，则分别作为$\mathcal{L}_1 \cup C$的理论和$\mathcal{L}_2 \cup C$的理论，$T$与$U$也是不可分的。

证明：（1）设不然，则有$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$的语句$\theta, \sigma$使得$T \cup \{\varphi\} \models \theta$，$U \models \neg\theta$，$T \cup \{\neg\varphi\} \models \sigma$，$U \models \neg\sigma$。因此$T \models \theta \vee \sigma$，$U \models \neg(\theta \vee \sigma)$，所以$T$与$U$可分，与假设矛盾。

（2）设不然，则有$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$的语句$\theta(c)$使得$T \models \varphi(c) \to \theta(c)$，$U \models \neg\theta(c)$。由

于c不出现于T中，所以$T \models \forall x (\varphi(x) \to \theta(x))$，又由于$T \models \exists x \varphi(x)$，所以$T \models \exists x \theta(x)$。同样由于$c$不出现于$U$中，所以$T \models \forall x \neg\theta(x)$，即$U \models \neg\exists x \theta(x)$。这与假设$T$与$U$不可分矛盾。

（3）设不然，则有$(\mathcal{L}_1 \cup C) \cap (\mathcal{L}_2 \cup C)$的语句$\theta(c_1, ..., c_n)$使得$T \models \theta(c_1, ..., c_n)$，$U \models \neg\theta(c_1, ..., c_n)$，其中$c_1, ..., c_n$是$\theta$中出现的所有新常项。显然，$T \models \forall x_1 ... \forall x_n \theta(x_1, ..., x_n)$，$U \models \neg\forall x_1 ... \forall x_n \theta(x_1, ..., x_n)$，而$\forall x_1 ... \forall x_n \theta(x_1, ..., x_n)$是$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$的语句，所以$T$与$U$可分，与假设矛盾。**证毕**。

定理 3.2.2（**插值定理**，*C&K2.2.20*）*如语句φ, ψ使得$\varphi \models \psi$，则有语句θ，使得θ的非逻辑符号都是φ, ψ的共同的非逻辑符号，而且$\varphi \models \theta$，$\theta \models \psi$。*

证明：设$\mathcal{L}_1$为φ中所有非逻辑符号构成的语言，$\mathcal{L}_2$为ψ中所有非逻辑符号构成的语言，$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$，$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$。设没有$\mathcal{L}_0$的语句$\theta$使得$\varphi \models \theta$，$\theta \models \psi$，即$\neg\psi \models \neg\theta$。要证$\varphi \not\models \psi$，即$\{\varphi, \neg\psi\}$一致。

令$T = \{\varphi\}$为语言$\mathcal{L}_1$的理论，$U = \{\neg\psi\}$为语言$\mathcal{L}_2$的理论，则由假设T与U不可分。我们要证$T \cup U$有模型。取不属于$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$的新常项的集合$C = \{c_0, c_1, c_2, ...\}$。设$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...$为$\mathcal{L}_1 \cup C$的所有语句，设$\psi_0, \psi_1, \psi_2, ...$为$\mathcal{L}_2 \cup C$的所有语句。定义$\mathcal{L}_1 \cup C$的理论$T_0 \subseteq T_1 \subseteq ...$，和$\mathcal{L}_2 \cup C$的理论$U_0 \subseteq U_1 \subseteq ...$如下：

令$T_0 = T$，$U_0 = U$。由假设已知T_0与U_0不可分。设T_m, U_m已定义，且T_m与U_m不可分，且分别是T_0与U_0的有限扩张，分两步定义T_{m+1}：

（1）由上面的引理，$T_m \cup \{\varphi_m\}$或$T_m \cup \{\neg\varphi_m\}$与$U_m$不可分，令其为$T'_m$；

（2）如φ_m具有形式$\exists x \sigma(x)$且$\varphi_m \in T'_m$，由上面的引理，可选择一个不在T_m，U_m，φ_m中出现的新常项c_p，使得$T'_m \cup \{\sigma(c_p)\}$与$U_m$不可分，令$T_{m+1} = T'_m \cup \{\sigma(c_p)\}$，否则，如$\varphi_m$不具有形式$\exists x \sigma(x)$，或$\varphi_m \notin T'_m$，则令$T_{m+1} = T'_m$。

同样可定义U_{m+1}使得$\psi_m \in U_{m+1}$或$\neg\psi_m \in U_{m+1}$，且T_{m+1}与U_{m+1}不可分。

令$T_\omega = \cup_m T_m$，$U_\omega = \cup_m U_m$。我们要证明$T_\omega \cup U_\omega$有模型，因此$T \cup U$有模型。

由定义，对任何$m \geq 0$，T_m与U_m不可分，因此T_ω的任何有限子集与U_ω的任何有限子集不可分，所以T_ω与U_ω不可分。所以T_ω一致。由上面定义的第（1）步可知，T_ω是完备的。由（2），T_ω以C为证据集。所以T_ω有模型$\mathfrak{A}$使得$A = \{c_0^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, ...\}$。同理，$U_\omega$完备，以$C$为证据集，且有模型$\mathfrak{B}$使得$B = \{c_0^{\mathfrak{B}}, c_1^{\mathfrak{B}}, ...\}$。

可以证明，对$\mathcal{L}_0 \cup C$的任一语句θ，$\mathfrak{A} \models \theta$当且仅当$\mathfrak{B} \models \theta$。为此设$\mathfrak{A} \models \theta$。由于$T_\omega$完备且$\mathfrak{A} \models T_\omega$，一定有$T_\omega \vdash \theta$。再由$T_\omega$与$U_\omega$不可分，应有$U_\omega \nvdash \neg\theta$，而$U_\omega$完备，所以$U_\omega \vdash \theta$，因此$\mathfrak{B} \models \theta$。反之亦然。所以，对$\mathcal{L}_0 \cup C$的任一语句$\theta$，$\mathfrak{A} \models \theta$当且仅当$\mathfrak{B} \models \theta$。

令$f : A \to B$定义为$f(c_i^{\mathfrak{A}}) = c_i^{\mathfrak{B}}$，$i = 0, 1, ...$。取$\theta$为$\mathcal{L}_0 \cup C$的语句$c_i \equiv c_j$，由上面的结论易知，$f$是良定义的而且一一映射。对$\mathcal{L}_0$的任何公式$\sigma(x_1, ..., x_n)$以及$c_{i_1}^{\mathfrak{A}}, ..., c_{i_n}^{\mathfrak{A}} \in A$，取$\theta$为$\mathcal{L}_0 \cup C$的语句$\sigma(c_{i_1}, ..., c_{i_n})$，由上面的结论易知，$\mathfrak{A} \models \sigma[c_{i_1}^{\mathfrak{A}}, ..., c_{i_n}^{\mathfrak{A}}]$当且仅当$\mathfrak{B} \models \sigma[c_{i_1}^{\mathfrak{B}}, ..., c_{i_n}^{\mathfrak{B}}]$。因此，$f : \mathfrak{A}|(\mathcal{L}_0 \cup C) \cong \mathfrak{B}|(\mathcal{L}_0 \cup C)$。

所以可取$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$使得$A=B$且$\mathfrak{A}|(\mathcal{L}_0\cup C)=\mathfrak{B}|(\mathcal{L}_0\cup C)$。令$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}|(\mathcal{L}_0\cup C)=\mathfrak{B}|(\mathcal{L}_0\cup C)$。则$\mathfrak{C}$可以膨胀为$\mathcal{L}_1\cup C$的模型$\mathfrak{A}$。同时，对$\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1$中的符号作与模型$\mathfrak{B}$一样的解释后，又可将$\mathfrak{A}$膨胀为$\mathcal{L}\cup C$的模型$\mathfrak{C}'$使得$\mathfrak{C}'|(\mathcal{L}_2\cup C)=\mathfrak{B}$。因此$\mathfrak{C}'\models T_\omega\cup U_\omega$。所以$T_\omega\cup U_\omega$一致，所以$\{\varphi,\neg\psi\}$一致。**证毕**。

设$P,P'\notin\mathcal{L}$，$\Sigma(P)$为语言$\mathcal{L}\cup\{P\}$的语句集。记$\Sigma(P')$为将$\Sigma(P)$中的公式中出现的P换成P'后所得的$\mathcal{L}\cup\{P'\}$的语句集。称$\Sigma(P)$**隐定义**P，假如

$$\Sigma(P)\cup\Sigma(P')\models\forall x_1...\forall x_n(P(x_1...x_n)\leftrightarrow P'(x_1...x_n))。$$

称$\Sigma(P)$**显定义**P，假如有$\mathcal{L}$的公式$\varphi(x_1...x_n)$使得

$$\Sigma(P)\models\forall x_1...\forall x_n(P(x_1...x_n)\leftrightarrow\varphi(x_1...x_n))。$$

定理 3.2.3 （*C&K2.2.22*）$\Sigma(P)$隐定义P，当且仅当$\Sigma(P)$显定义P。

证明：充分性显然。反之，设$\Sigma(P)$隐定义P。取新常项符号$c_1,...,c_n$，则

$$\Sigma(P)\cup\Sigma(P')\models P(c_1,...,c_n)\leftrightarrow P'(c_1,...,c_n)，$$

所以有$\varphi_1(P),...,\varphi_m(P)\in\Sigma(P)$，$\psi_1(P'),...,\psi_k(P')\in\Sigma(P')$，使得

$$\varphi_1\wedge...\wedge\psi_k\models P(c_1,...,c_n)\rightarrow P'(c_1,...,c_n)。$$

令$\chi(P)$为

$$\varphi_1(P)\wedge...\wedge\varphi_m(P)\wedge\psi_1(P)\wedge...\wedge\psi_k(P)，$$

则

$$\chi(P)\wedge\chi(P')\models P(c_1,...,c_n)\rightarrow P'(c_1,...,c_n)，$$

所以

$$\chi(P)\wedge P(c_1,...,c_n)\models\chi(P')\rightarrow P'(c_1,...,c_n)。$$

由插值定理，有$\mathcal{L}\cup\{c_1,...,c_n\}$语句$\theta(c_1,...,c_n)$使得$\chi(P)\wedge P(c_1,...,c_n)\models\theta(c_1,...,c_n)$，$\theta(c_1,...,c_n)\models\chi(P')\rightarrow P'(c_1,...,c_n)$。$P'$不在$\theta(c_1,...,c_n)$中出现，因此应有$\theta(c_1,...,c_n)\models\chi(P)\rightarrow P(c_1,...,c_n)$。所以$\chi(P)\models P(c_1,...,c_n)\leftrightarrow\theta(c_1,...,c_n)$。由于$c_1,...,c_n$不在$\chi(P)$中出现，所以$\chi(P)\models\forall x_1...\forall x_n(P(x_1...x_n)\leftrightarrow\theta(x_1...x_n))$。所以$\Sigma(P)$显定义$P$。**证毕**。

定理 3.2.4 （***Robinson*一致性定理**，*C&K2.2.23*）设$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_2$，$T,T_1,T_2$分别为$\mathcal{L},\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$的一致的理论，$T\subseteq T_1$，$T\subseteq T_2$，$T$完备，则$T_1\cup T_2$一致。

证明：设$T_1\cup T_2$不一致，则有T_1中的有限个语句的合取σ_1，T_2中的有限个语句的合取σ_2，使得$\{\sigma_1,\sigma_2\}$不一致，即$\sigma_1\models\neg\sigma_2$。由插值定理，有$\mathcal{L}$的语句$\theta$使得$\sigma_1\models\theta$，$\theta\models\neg\sigma_2$，即$\sigma_2\models\neg\theta$。所以$T_1\models\theta$，$T_2\models\neg\theta$。因为$\mathcal{L}$的理论$T$完备，有$T\models\theta$或者$T\models\neg\theta$。因为$T\subseteq T_2$，由$T\models\theta$应有$T_2\models\theta$，所以$T_2$不一致，与假设矛盾。同理，由$T\models\neg\theta$应有$T_1$不一致，与假设矛盾。所以$T_1\cup T_2$一致。**证毕**。

下面设$\neg, \vee, \wedge, \forall, \exists$均为初始逻辑常项。称一个符号在$\varphi$中的一个出现为**正出现**，如它是在偶数个$\neg$的辖域内，否则它是一个**负出现**。

定理 3.2.5 （*C&K2.2.24*）设语句φ, ψ中没有函数符号和常项符号，$\varphi \models \psi$，则有语句θ使得$\varphi \models \theta$，$\theta \models \psi$，而且θ中正（或负）出现的谓词符号在φ, ψ中都有正（或负）出现。

证明: 设$\mathcal{L}$为φ, ψ中出现的谓词符号的集合。取新常项符号$C = \{c_0, c_1, ...\}$，令$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$。对$\mathcal{L}'$的公式$\sigma$，称$\sigma$为否定范式，假如其中否定号只出现在原子公式前。显然每个公式等价于一个否定范式。我们假设公式都已化为否定范式。$\neg\sigma$的否定范式记为σ^*。称一个公式σ与另一公式χ相容，假如σ中正（负）出现的谓词符号也在χ中都有正（负）出现。令Φ为所有与φ相容的$\mathcal{L}'$语句（否定范式）的集合，令Ψ为所有与ψ相容的$\mathcal{L}'$语句（否定范式）的集合，$\Psi^* = \{\sigma^* : \sigma \in \Psi\}$。对理论$T \subseteq \Phi$，$U \subseteq \Psi^*$，称$T$与$U$不可分，假如不存在$\theta \in \Phi \cap \Psi$使得$T \models \theta$，$U \models \neg\theta$。显然，如$T$与$U$不可分，则$T$与$U$都一致，否则$c_0 \equiv c_0$或者$\neg c_0 \equiv c_0$可分离$T$与$U$。

假设定理的结论不成立。因此$\{\varphi\}$与$\{\psi^*\}$不可分。我们要证$\{\varphi, \psi^*\}$一致，因此与假设$\varphi \models \psi$矛盾。设$\varphi_0, \varphi_1, ...$为$\Phi$中所有语句，$\psi_0, \psi_1, ...$为$\Psi$中所有语句。定义$T_0 = \{\varphi\} \subseteq T_1 \subseteq ...$，$U_0 = \{\psi\} \subseteq U_1 \subseteq ...$如下：设$T_m, U_m$已定义使得$T_m \subseteq \Phi$，$U_m \subseteq \Psi^*$，$T_m$与$U_m$不可分，且$T_m$与$U_m$都是有限语句集，

（1）如$T_m \cup \{\varphi_m\}$与U_m不可分，则令$T'_m = T_m \cup \{\varphi_m\}$，否则令$T'_m = T_m$；

（2）如$\varphi_m \in T'_m$且有形状$\exists x\sigma(x)$，取一不在T'_m, U_m, φ_m中出现的新常项c_p，令$T_{m+1} = T'_m \cup \{\sigma(c_p)\}$，否则令$T_{m+1} = T'_m$。

在（2）中，由$\exists x\sigma(x)$与φ相容可知$\sigma(c_p)$也与φ相容，因此$T_{m+1} \subseteq \Phi$。而且可证T_{m+1}与U_m不可分。如不然，则应有$\exists x\sigma(x) \in T'_m$且有$\theta(c_p) \in \Phi \cap \Psi$使得$T'_m \cup \{\sigma(c_p)\} \models \theta(c_p)$，$U_m \models \neg\theta(c_p)$。由$c_p$不在$T'_m, U_m, \varphi_m = \exists x\sigma(x)$中出现可得$T'_m \models \exists x\theta(x)$，$U_m \models \neg\exists x\theta(x)$。由$\exists x\theta(x) \in \Phi \cap \Psi$可知$\theta \in \Phi \cap \Psi$。因此$T'_m$与$U_m$不可分，矛盾。所以$T_{m+1} \subseteq \Phi$，且$T_{m+1}$与$U_m$不可分，且$T_m$是有限语句集。可类似地定义$U_{m+1}$使得$U_{m+1} \subseteq \Psi^*$，$T_{m+1}$与$U_{m+1}$不可分，且$U_{m+1}$是有限语句集。

令$T_\omega = \cup_m T_m$，$U_\omega = \cup_m U_m$。同前易证T_ω与U_ω不可分。我们要证$T_\omega \cup U_\omega$有模型，因此一致，因此$\{\varphi, \psi^*\}$一致。先证明T_ω与U_ω有如下性质：

（*a*）如$\sigma_1 \vee \sigma_2 \in \Phi$，$T_\omega \models \sigma_1 \vee \sigma_2$，则$T_\omega \models \sigma_1$或者$T_\omega \models \sigma_2$，对$U_\omega$一样；

（*b*）对新常项$c, c' \in C$，$T_\omega \models c \equiv c'$当且仅当$U_\omega \models c \equiv c'$；

（*c*）对任意谓词符号P及新常项$d_1, ..., d_n \in C$，如$T_\omega \models P(d_1, ..., d_n)$，则$U_\omega \not\models \neg P(d_1, ..., d_n)$，如$U_\omega \models P(d_1, ..., d_n)$，则$T_\omega \not\models \neg P(d_1, ..., d_n)$。

（*d*）如$\exists x\sigma(x) \in \Phi$，$T_\omega \models \exists x\sigma(x)$，则有新常项$c \in C$使得$T_\omega \models \sigma(c)$，对$U_\omega$一样。

证明：（a）设$\sigma_1 \vee \sigma_2 \in \Phi$，$T_\omega \models \sigma_1 \vee \sigma_2$，但$T_\omega \nvDash \sigma_1$，$T_\omega \nvDash \sigma_2$。由$\sigma_1 \vee \sigma_2 \in \Phi$可得$\sigma_1, \sigma_2 \in \Phi$。不妨设$\sigma_1$为$\varphi_m$，$\sigma_2$为$\varphi_k$。由$T_\omega \nvDash \sigma_1$可得$\sigma_1 \notin T_\omega$，因此$\varphi_m \notin T_{m+1}$，因此$T_m \cup \{\varphi_m\}$与$U_m$可分。所以有$\theta_1 \in \Phi \cap \Psi$使得$T_m \cup \{\varphi_m\} \models \theta_1$，$U_m \models \neg\theta_1$。所以，$T_\omega \cup \{\sigma_1\} \models \theta_1$，$U_\omega \models \neg\theta_1$。同理有$\theta_2 \in \Phi \cap \Psi$使得$T_\omega \cup \{\sigma_2\} \models \theta_2$，$U_\omega \models \neg\theta_2$。所以，由$T_\omega \models \sigma_1 \vee \sigma_2$可得$T_\omega \models \theta_1 \vee \theta_2$，$U_\omega \models \neg(\theta_1 \vee \theta_2)$。显然$\theta_1 \vee \theta_2 \in \Phi \cap \Psi$。所以$T_\omega$与$U_\omega$可分，矛盾。

（b）注意，$c \equiv c' \in \Phi \cap \Psi$。设$c \equiv c'$为$\psi_m$，且$T_\omega \models c \equiv c'$，但$U_\omega \nvDash c \equiv c'$。则$\psi_m \notin U_{m+1}$因此$T_{m+1}$与$U_m \cup \{\psi_m\}$可分，即有$\theta \in \Phi \cap \Psi$使得$T_{m+1} \models \theta$，$U_m \cup \{\psi_m\} \models \neg\theta$，所以$T_\omega \models \theta$，$U_\omega \cup \{c \equiv c'\} \models \neg\theta$，所以$T_\omega \models c \equiv c' \wedge \theta$，$U_\omega \models \neg(c \equiv c' \wedge \theta)$。显然，$c \equiv c' \wedge \theta \in \Phi \cap \Psi$。所以$T_\omega$与$U_\omega$可分，矛盾。所以$T_\omega \models c \equiv c'$蕴涵$U_\omega \models c \equiv c'$。同理可证$U_\omega \models c \equiv c'$蕴涵$T_\omega \models c \equiv c'$。

（c）设$T_\omega \models P(d_1, ..., d_n)$，但$U_\omega \models \neg P(d_1, ..., d_n)$。由$T_\omega \models P(d_1, ..., d_n)$可证，$P$在$T_\omega$中的某个公式中有正出现。如不然，即$P$在$T_\omega$中的任何公式中至多只有负出现，则任给$T_\omega$的模型$\mathfrak{A}$，可以修改$\mathfrak{A}$使得$P$的解释为空集，即$P(x_1, ..., x_n)$永假，归纳可证，结果还是$T_\omega$的模型，但使得$P(d_1, ..., d_n)$为假，与$T_\omega \models P(d_1, ..., d_n)$矛盾。所以$P$至少在$T_\omega$中的一个公式中有正出现。由于$T_\omega \subseteq \Phi$，所以$P$在$\varphi$中有正出现，所以$P(d_1, ..., d_n) \in \Phi$。由$U_\omega \models \neg P(d_1, ..., d_n)$同样可得$P$在$U_\omega$中的某个公式中有负出现。由于$U_\omega \subseteq \Psi^*$，所以$P$在$\Psi^*$中的某个公式中有负出现，所以$P$在$\Psi$中的某个公式中有正出现，所以$P$在$\psi$中有正出现，所以$P(d_1, ..., d_n) \in \Psi$。所以$P(d_1, ..., d_n) \in \Phi \cap \Psi$，而$T_\omega \models P(d_1, ..., d_n)$，$U_\omega \models \neg P(d_1, ..., d_n)$，即$T_\omega$与$U_\omega$可分，矛盾。所以$T_\omega \models P(d_1, ..., d_n)$蕴涵$U_\omega \nvDash \neg P(d_1, ..., d_n)$。同理可证，$U_\omega \models P(d_1, ..., d_n)$蕴涵$T_\omega \nvDash \neg P(d_1, ..., d_n)$。

（d）设$\exists x \sigma(x) \in \Phi$，$T_\omega \models \exists x \sigma(x)$。设$\exists x \sigma(x)$为$\varphi_m$。可证$T_m \cup \{\varphi_m\}$与$U_m$不可分。若不然，则有$\theta \in \Phi \cap \Psi$使得$T_m \cup \{\varphi_m\} \models \theta$，$U_m \models \neg\theta$，所以，$T_\omega \cup \{\varphi_m\} \models \theta$，$U_\omega \models \neg\theta$。由$T_\omega \models \exists x \sigma(x)$可得$T_\omega \models \theta$，$U_\omega \models \neg\theta$，所以$T_\omega$与$U_\omega$可分，矛盾。所以$T_m \cup \{\varphi_m\}$与$U_m$不可分。由上面的定义（2），有新常项$c$使得$\sigma(c) \in T_{m+1} \subseteq T_\omega$，所以$T_\omega \models \sigma(c)$。**证毕**。

回到定理的证明。下面构造$T_\omega \cup U_\omega$的模型。定义$\mathcal{L}'$的模型$\mathfrak{A}$如下：对新常项$c, d \in C$，由上面的结论（b）可定义

$$c \sim d \text{ iff. } T_\omega \models c \equiv d \text{ iff. } U_\omega \models c \equiv d。$$

显然$\sim$是等价关系。令$A = \{[c]_\sim : c \in C\}$。对谓词符号$P$，定义

$$P^{\mathfrak{A}}([d_1], ..., [d_n]) \text{ iff. }（T_\omega \models P(d_1, ..., d_n) \text{或} U_\omega \models P(d_1, ..., d_n)）。$$

设$d_1' \sim d_1, ..., d_n' \sim d_n$，则$T_\omega \models P(d_1, ..., d_n) \leftrightarrow P(d_1', ..., d_n')$，$U_\omega \models P(d_1, ..., d_n) \leftrightarrow P(d_1', ..., d_n')$，所以，

$$（T_\omega \models P(d_1, ..., d_n) \text{或} U_\omega \models P(d_1, ..., d_n)）\text{iff.}$$
$$（T_\omega \models P(d_1', ..., d_n') \text{或} U_\omega \models P(d_1', ..., d_n')）。$$

所以$P^{\mathfrak{A}}$的定义是合理的。对常项符号$c \in C$，定义

$$c^{\mathfrak{A}} = [c]。$$

归纳证明，对任何$\sigma \in \Phi$，$T_\omega \models \sigma$蕴涵$\mathfrak{A} \models \sigma$。为此设$\sigma \in \Phi$，$T_\omega \models \sigma$。

（1）σ为$c \equiv d$时，由$T_\omega \models c \equiv d$可知$c \sim d$，所以$[c] = [d]$，所以$\mathfrak{A} \models \sigma$。

（2）σ为$\neg c \equiv d$时，由于T_ω一致，由$T_\omega \models \neg c \equiv d$可知$T_\omega \not\models c \equiv d$，所以$c \nsim d$，所以$[c] \neq [d]$，所以$\mathfrak{A} \models \sigma$。

（3）σ为$P(d_1, ..., d_n)$时，由$T_\omega \models P(d_1, ..., d_n)$可知$P^{\mathfrak{A}}([d_1], ..., [d_n])$，所以$\mathfrak{A} \models \sigma$。

（4）σ为$\neg P(d_1, ..., d_n)$时，由于T_ω一致，$T_\omega \not\models P(d_1, ..., d_n)$，又由上面的结论（c），由$T_\omega \models \neg P(d_1, ..., d_n)$可得$U_\omega \not\models P(d_1, ..., d_n)$，所以由定义，$P^{\mathfrak{A}}([d_1], ..., [d_n])$不成立，即$\mathfrak{A} \models \sigma$。

（5）σ为$\sigma_1 \vee \sigma_2$时，由上面结论（a），由$T_\omega \models \sigma_1 \vee \sigma_2$可得$T_\omega \models \sigma_1$或$T_\omega \models \sigma_2$，再由归纳假设可得$\mathfrak{A} \models \sigma_1$或$\mathfrak{A} \models \sigma_2$，所以$\mathfrak{A} \models \sigma$。

（6）σ为$\sigma_1 \wedge \sigma_2$时，由归纳假设，显然。

（7）σ为$\exists x \sigma'(x)$时，由$T_\omega \models \exists x \sigma'(x)$及上面结论（d），有新常项$c$使得$T_\omega \models \sigma'(c)$，再由归纳假设可得$\mathfrak{A} \models \sigma'(c)$，所以$\mathfrak{A} \models \sigma$。

（8）σ为$\forall x \sigma'(x)$时，由$T_\omega \models \forall x \sigma'(x)$，对任何新常项$c$，$T_\omega \models \sigma'(c)$，再由归纳假设可得$\mathfrak{A} \models \sigma'(c)$。由于$A$中每个个体都是新常项的解释，所以$\mathfrak{A} \models \sigma$。

因为$T_\omega \subseteq \Phi$，所以$\mathfrak{A} \models T_\omega$。同理可证$\mathfrak{A} \models U_\omega$。所以$T_\omega \cup U_\omega$有模型。而$\{\varphi, \psi^*\} = T_0 \cup U_0 \subseteq T_\omega \cup U_\omega$。所以$\{\varphi, \psi^*\}$一致，与假设矛盾。**证毕**。

以下是用模型链方法对Robinson一致性定理的另一个证明。

引理 3.2.6 *设语言$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$，$\mathfrak{A}$是$\mathcal{L}_1$的模型，$\mathfrak{B}$是$\mathcal{L}_2$的模型，$\mathfrak{A}|\mathcal{L} \equiv \mathfrak{B}|\mathcal{L}$，则有$\mathcal{L}_2$的模型$\mathfrak{B}'$使得$\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}'$，而且有$f : \mathfrak{A}|\mathcal{L} \preccurlyeq \mathfrak{B}'|\mathcal{L}$。*

证明：令$\Sigma = Th((\mathfrak{A}|\mathcal{L})_A) \cup Th(\mathfrak{B}_B)$为$\mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_A \cup \mathcal{L}_B$的语句集。这里假设$\mathcal{L}_A$与$\mathcal{L}_B$中的新常项不相交。设$\Gamma$为$\Sigma$的一个有限子集。将一些语句合取后不妨设$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2\}$，其中$\varphi_1 = \varphi_1(c_{a_1}, ..., c_{a_n})$，$\varphi_1(x_1, ..., x_n)$为$\mathcal{L}$的公式，$\varphi_2 = \varphi_2(c_{b_1}, ..., c_{b_m})$，$\varphi_2(x_1, ..., x_m)$为$\mathcal{L}_2$的公式，$a_1, ..., a_n \in A$，$b_1, ..., b_m \in B$，$(\mathfrak{A}|\mathcal{L})_A \models \varphi_1(c_{a_1}, ..., c_{a_n})$，$\mathfrak{B}_B \models \varphi_2(c_{b_1}, ..., c_{b_m})$。所以$\mathfrak{A} \models \exists x_1 ... \exists x_n \varphi_1(x_1, ..., x_n)$。由于$\mathfrak{A}|\mathcal{L} \equiv \mathfrak{B}|\mathcal{L}$，$\mathfrak{B} \models \exists x_1 ... \exists x_n \varphi_1(x_1, ..., x_n)$。所以有$a'_1, ..., a'_n \in B$使得$\mathfrak{B} \models \varphi_1[a'_1, ..., a'_n]$，所以$\mathfrak{B}_B \models \varphi_1[a'_1, ..., a'_n]$。因假设$\mathcal{L}_A$与$\mathcal{L}_B$中的新常项不相交，可将$c_{a_1}, ..., c_{a_n}$分别解释为$a'_1, ..., a'_n$从而将$\mathfrak{B}_B$膨胀为$\varphi_1(c_{a_1}, ..., c_{a_n})$的模型。所以$\Gamma$有模型。所以$\Sigma$有模型$\mathfrak{B}'$。由$\mathfrak{B}' \models Th(\mathfrak{B}_B)$可知$\mathfrak{B}$可初等嵌入于$\mathfrak{B}'|\mathcal{L}_2$中。可以取$\mathfrak{B}'$使得$\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}'|\mathcal{L}_2$。由$\mathfrak{B}' \models Th((\mathfrak{A}|\mathcal{L})_A)$可知$\mathfrak{A}|\mathcal{L}$可初等嵌入于$\mathfrak{B}'|\mathcal{L}$中。**证毕**。

我们用$\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$表示$\mathfrak{A}|\mathcal{L} \equiv \mathfrak{B}|\mathcal{L}$，用$f : \mathfrak{A} \preccurlyeq_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$表示$f : \mathfrak{A}|\mathcal{L} \preccurlyeq \mathfrak{B}'|\mathcal{L}$。这个

引理可用下图表示：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & & \\ |||_{\mathcal{L}} & \searrow^{f} & \\ \mathfrak{B} & \preccurlyeq & \mathfrak{B}' \end{array}$$

其中$f:\mathfrak{A}\preccurlyeq_{\mathcal{L}}\mathfrak{B}'$，因此$\mathfrak{B}'|\mathcal{L}$有一个初等子模型同构于$\mathfrak{A}|\mathcal{L}$，所以$\mathfrak{B}'$以初等子模型的方式同时包含了$\mathfrak{A}|\mathcal{L}$和$\mathfrak{B}$的复本。

定理 3.2.7（***Robinson*一致性定理**，*C&K, p.141*）设语言$\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_2=\mathcal{L}$，$T,T_1,T_2$分别是$\mathcal{L},\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$的理论，$T\subseteq T_1$，$T\subseteq T_2$，$T$完备，$T_1,T_2$各自是一致的，则$T_1\cup T_2$是语言$\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$的一致的理论。

证明: 由假设有$\mathcal{L}_1$的模型$\mathfrak{A}_0\models T_1$，有$\mathcal{L}_2$的模型$\mathfrak{B}_0\models T_2$。由$T$完备及$\mathfrak{A}_0|\mathcal{L}\models T$，$\mathfrak{B}_0|\mathcal{L}\models T$，可知$\mathfrak{A}_0\equiv_{\mathcal{L}}\mathfrak{B}_0$。由上面的引理，有$\mathcal{L}_2$的模型$\mathfrak{B}_1$使得$\mathfrak{B}_0\preccurlyeq\mathfrak{B}_1$，并有$f_1:\mathfrak{A}_0\preccurlyeq_{\mathcal{L}}\mathfrak{B}_1$。所以对$\mathcal{L}$的公式$\varphi_1(x_1,...,x_n)$以及$a_1,...,a_n\in A_0$，$\mathfrak{A}_0\models\varphi[a_1,...,a_n]$当且仅当$\mathfrak{B}_1\models\varphi[f_1(a_1),...,f_1(a_n)]$，即$(\mathfrak{A}_0,a)_{a\in A_0}\models\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$当且仅当$(\mathfrak{B}_1,f_1(a))_{a\in A_0}\models\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$。所以$(\mathfrak{A}_0,a)_{a\in A_0}\equiv_{\mathcal{L}_{A_0}}(\mathfrak{B}_1,f_1(a))_{a\in A_0}$。再上面的引理，有$\mathcal{L}_1$的模型$\mathfrak{A}_1$使得$(\mathfrak{A}_0,a)_{a\in A_0}\preccurlyeq(\mathfrak{A}_1,a)_{a\in A_0}$，并有$g_1:(\mathfrak{B}_1,f_1(a))_{a\in A_0}\preccurlyeq_{\mathcal{L}_{A_0}}(\mathfrak{A}_1,a)_{a\in A_0}$。注意，$g_1(f_1(a))=a$对$a\in A_0$，即$g_1\circ f_1=id_{A_0}$。显然$g_1:\mathfrak{B}_1\preccurlyeq_{\mathcal{L}}\mathfrak{A}_1$。同上可得$(\mathfrak{B}_1,b)_{b\in B_1}\equiv_{\mathcal{L}_{B_1}}(\mathfrak{A}_1,g_1(b))_{b\in B_1}$。同样由上面的引理，有$\mathcal{L}_2$的模型$\mathfrak{B}_2$使得$(\mathfrak{B}_1,b)_{b\in B_1}\preccurlyeq(\mathfrak{B}_2,b)_{b\in B_1}$，并有$f_2:(\mathfrak{A}_1,g_1(b))_{b\in B_1}\preccurlyeq_{\mathcal{L}_{B_1}}(\mathfrak{B}_2,b)_{b\in B_1}$。显然，$f_2(g_1(b))=b$对$b\in B_1$，即$f_2\circ g_1=id_{B_1}$。所以$f_2\circ g_1\circ f_1=f_1$。所以$f_2\circ id_{A_0}=f_1$，即$f_1\subseteq f_2$。同理可构造$\mathfrak{A}_2,\mathfrak{B}_3,...$等。所以有

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{A}_0 & \preccurlyeq & \mathfrak{A}_1 & \preccurlyeq & \mathfrak{A}_2 & \preccurlyeq & ... \\ |||_{\mathcal{L}} & \searrow^{f_1} & \uparrow_{g_1} & \searrow^{f_2} & \uparrow_{g_2} & ... & ... \\ \mathfrak{B}_0 & \preccurlyeq & \mathfrak{B}_1 & \preccurlyeq & \mathfrak{B}_2 & \preccurlyeq & ... \end{array}$$

其中，$f_i:\mathfrak{A}_{i-1}\preccurlyeq_{\mathcal{L}}\mathfrak{B}_i$，$g_i:\mathfrak{B}_i\preccurlyeq_{\mathcal{L}}\mathfrak{A}_i$，$g_i\circ f_i=id_{A_i}$，$f_{i+1}\circ g_i=id_{B_i}$，$f_i\subseteq f_{i+1}$，$g_i\subseteq g_{i+1}$。令$\mathfrak{A}=\cup_i\mathfrak{A}_i$，$\mathfrak{B}=\cup_i\mathfrak{B}_i$，$f=\cup_i f_i$。则$f:A\to B$。因为每个$f_i$是单映射，显然$f$也是单映射。又因为$f_{i+1}\circ g_i=id_{B_i}$，所以$ran(f_{i+1})\supseteq B_i$。所以$ran(f)\supseteq B$。所以$f$是双射。易证$f:\mathfrak{A}|\mathcal{L}\cong\mathfrak{B}|\mathcal{L}$。由定理2.3.2，$\mathfrak{A}_0\preccurlyeq\mathfrak{A}$。所以$\mathfrak{A}\models T_1$。同理，$\mathfrak{B}\models T_2$。由$f:\mathfrak{A}|\mathcal{L}\cong\mathfrak{B}|\mathcal{L}$，可将$\mathfrak{B}$膨胀为$\mathcal{L}_1$的模型$\mathfrak{B}'$使得$f:\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}'|\mathcal{L}_1$。因此$\mathfrak{B}'\models T_1\cup T_2$。所以$T_1\cup T_2$一致。**证毕**。

§3.3 保持定理

设T是$\mathcal{L}$的理论。称T在子模型下保持，假如$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B}\models T$蕴涵$\mathfrak{A}\models T$。称$T$在模型链并下保持，假如$\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}_1\subseteq...$且$\mathfrak{A}_i\models T$对$i=0,1,...$蕴涵$\cup_i\mathfrak{A}_i\models T$。称$T$在同态下保持，假如$\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\models T$蕴涵$\mathfrak{B}\models T$。

引理 3.3.1 （*C&K3.2.1*）设理论T一致，语句集Σ在有限析取下封闭，则T有公理集$\Gamma\subseteq\Sigma$，当且仅当对任何模型$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$，如$\mathfrak{A}\models T$，且任何在$\mathfrak{A}$中有效的$\Sigma$中的语句也在$\mathfrak{B}$中有效，则$\mathfrak{B}\models T$。

证明：必要性：由假设T有公理集$\Gamma \subseteq \Sigma$及$\mathfrak{A} \models T$有$\mathfrak{A} \models \Gamma$，又由假设任何在$\mathfrak{A}$中有效的$\Sigma$中的语句也在$\mathfrak{B}$中有效，所以$\mathfrak{B} \models \Gamma$，而$\Gamma$是$T$的公理集，所以$\mathfrak{B} \models T$。

充分性：设条件成立。令$\Gamma = \{\sigma \in \Sigma : T \models \sigma\}$，则$T \models \Gamma$，因此只要证$\Gamma \models T$。设$\mathfrak{B} \models \Gamma$，要证$\mathfrak{B} \models T$。由条件，只要找$\mathfrak{A}$，使得$\mathfrak{A} \models T$，且任何在$\mathfrak{A}$中有效的$\Sigma$中的语句也在$\mathfrak{B}$中有效，即任何在$\mathfrak{B}$中不有效的$\Sigma$中的语句也在$\mathfrak{A}$中不有效。令$\Delta = \{\neg\sigma : \sigma \in \Sigma, \mathfrak{B} \models \neg\sigma\}$。可以证明$T \cup \Delta$一致：如不然，则有$\neg\sigma_1, ..., \neg\sigma_n \in \Delta$使得$T \cup \{\neg\sigma_1, ..., \neg\sigma_n\}$不一致，所以$T \models \sigma_1 \vee ... \vee \sigma_n$。因为$\Sigma$在有限析取下封闭，所以$\sigma_1 \vee ... \vee \sigma_n \in \Gamma$，所以$\mathfrak{B} \models \sigma_1 \vee ... \vee \sigma_n$，与$\neg\sigma_1, ..., \neg\sigma_n \in \Delta$矛盾。所以$T \cup \Delta$一致。设$\mathfrak{A}$使得$\mathfrak{A} \models T \cup \Delta$，则$\mathfrak{A} \models T$，且任何在$\mathfrak{B}$中不有效的$\Sigma$中的语句也在$\mathfrak{A}$中不有效。**证毕**。

定理 3.3.2 （*C&K3.2.2*）$\mathcal{L}$的理论T在子模型下保持，当且仅当T有Π_1^0公理集。

证明：充分性：易证对任何Π_1^0语句φ，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$，$\mathfrak{B} \models \varphi$蕴涵$\mathfrak{A} \models \varphi$。因此，设$T$有$\Pi_1^0$公理集$\Gamma$，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$，则$\mathfrak{B} \models \Gamma$蕴涵$\mathfrak{A} \models \Gamma$，即$\mathfrak{B} \models T$蕴涵$\mathfrak{A} \models T$。

必要性：设T在子模型下保持。Π_1^0语句集在有限析取下封闭。（逻辑等价于Π_1^0语句的语句都视为Π_1^0语句。）由上面的引理，只要证，对任何模型$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$，如$\mathfrak{A} \models T$，且任何在$\mathfrak{A}$中有效的$\Pi_1^0$语句也在$\mathfrak{B}$中有效，则$\mathfrak{B} \models T$。为此设$\mathfrak{A} \models T$且任何在$\mathfrak{A}$中有效的$\Pi_1^0$语句也在$\mathfrak{B}$中有效。令$\Delta_{\mathfrak{B}}$为$\mathfrak{B}$的图。先证明$T \cup \Delta_{\mathfrak{B}}$有模型。为此设有限集$\Sigma = \{\theta_1(c_{b_1}, ..., c_{b_n}), ..., \theta_m(c_{b_1}, ..., c_{b_n})\} \subseteq \Delta_{\mathfrak{B}}$，其中$\theta_i(x_1, ..., x_n)$是$\mathcal{L}$的公式，$b_1, ..., b_n \in B$。则$\mathfrak{B} \models \exists x_1 ... \exists x_n (\theta_1(x_1, ..., x_n) \wedge ... \wedge \theta_m(x_1, ..., x_n))$。所以$\mathfrak{B} \not\models \forall x_1 ... \forall x_n \neg(\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_m)$。这是$\Pi_1^0$语句。所以由假设$\mathfrak{A} \not\models \forall x_1 ... \forall x_n \neg(\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_m)$。所以$\mathfrak{A} \models \exists x_1 ... \exists x_n (\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_m)$。所以$\mathfrak{A}$可膨胀为$\Sigma$的模型。由于$\mathfrak{A} \models T$，所以$T \cup \Sigma$有模型，即$T \cup \Delta_{\mathfrak{B}}$的每个有限子集有模型。所以$T \cup \Delta_{\mathfrak{B}}$有模型$\mathfrak{B}'$。由$\mathfrak{B}' \models \Delta_{\mathfrak{B}}$知可取$\mathfrak{B}'$使得$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}'|\mathcal{L}$。因为$T$在子模型下保持，由$\mathfrak{B}' \models T$可得$\mathfrak{B} \models T$。**证毕**。

定理 3.3.3 （*C&K3.2.3*）$\mathcal{L}$的理论T在模型链并下保持，当且仅当T有Π_2^0公理集。

证明：充分性：设$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq ...$是由$T$的模型构成的模型链，$\mathfrak{A} = \cup_i \mathfrak{A}_i$是该模型链的并。$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq ...$是$\Sigma_1^0$链，所以由定理2.3.3，如$\varphi$是$\Pi_2^0$语句，且$\mathfrak{A}_i \models \varphi$对$i = 0, 1, ...$，则$\mathfrak{A} \models \varphi$。因此，对$T$的任意$\Pi_2^0$公理$\varphi$应有$\mathfrak{A} \models \varphi$。所以$\mathfrak{A} \models T$。

必要性：设T在模型链并下保持。Π_2^0语句的集合对析取封闭。所以由上面的引理，只要证，对任何模型$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$，如$\mathfrak{A} \models T$，且任何在$\mathfrak{A}$中有效的$\Pi_2^0$语句也在$\mathfrak{B}$中有效，则$\mathfrak{B} \models T$。为此设$\mathfrak{A} \models T$且任何在$\mathfrak{A}$中有效的$\Pi_2^0$语句也在$\mathfrak{B}$中有效。则任何在$\mathfrak{B}$中有效的$\Sigma_2^0$语句也在$\mathfrak{A}$中有效。我们要构造模型链$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq ...$使得$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_2 \equiv ...$，$\mathfrak{B}_0 \preccurlyeq \mathfrak{B}_1 \preccurlyeq ...$。令

$$\Gamma = \left\{\varphi : \varphi\text{为}\mathcal{L}_{B_0}\text{的}\Pi_1^0\text{语句且}\left(\mathfrak{B}_0\right)_{B_0} \models \varphi\right\},$$

即$\mathfrak{B}_0$的Π_1^0图。可以证明，

（*1*）$Th(\mathfrak{A})\cup\Gamma$有模型。

证明：设$\varphi(c_{b_1},...,c_{b_n})\in\Gamma$，其中$\varphi(x_1,...,x_n)$为$\mathcal{L}$的公式，$b_1,...,b_n\in B_0$。则$\mathfrak{B}_0\models\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$。这是$\Sigma_2^0$语句，所以$\mathfrak{A}\models\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$。所以$Th(\mathfrak{A})\cup\{\varphi(c_{b_1},...,c_{b_n})\}$有模型。因为$\Gamma$在有限交下封闭。由此可得$Th(\mathfrak{A})\cup\Gamma$的任何有限子集有模型。所以$Th(\mathfrak{A})\cup\Gamma$有模型。**证毕**。

回到定理的证明。设$\mathfrak{A}_1'\models Th(\mathfrak{A})\cup\Gamma$。$\mathfrak{A}_1'$是$\mathcal{L}_{B_0}$的模型，可表示为$\mathfrak{A}_1'=(\mathfrak{A}_1,b)_{b\in B_0}$，其中$\mathfrak{A}_1$为$\mathcal{L}$的模型，$\mathfrak{A}_1\models Th(\mathfrak{A})$。因此$\mathfrak{A}_1\equiv\mathfrak{A}$。因为$\mathfrak{A}_1'\models\Gamma$，$\Gamma\supseteq\Delta_{\mathfrak{B}_0}$即$\mathfrak{B}_0$的图，所以$(\mathfrak{B}_0)_{B_0}$可同构嵌入于$\mathfrak{A}_1'$中。所以不妨设$B_0\subseteq A_1'=A_1$，$(\mathfrak{B}_0)_{B_0}\subseteq\mathfrak{A}_1'$。所以，$\mathfrak{B}_0\subseteq\mathfrak{A}_1$。又可以证明，

（*2*）$Th\left((\mathfrak{B}_0)_{B_0}\right)\cup\Delta_{\mathfrak{A}_1'}$有模型。

证明：设$\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$为$\Delta_{\mathfrak{A}_1'}$中有限个公式的合取，其中$\varphi(x_1,...,x_n)$为$\mathcal{L}_{B_0}$的公式，$a_1,...,a_n\in A_1-B_0$。这里约定，对$b\in B_0$，在语言膨胀$\mathcal{L}_{B_0},\mathcal{L}_{A_1}$中我们用同一个新常项$c_b$来代表$b$。$(\mathfrak{A}_1')_{A_1}\models\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$。所以$\mathfrak{A}_1'\models\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$。$\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$是开语句，所以$\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$是$\mathcal{L}_{B_0}$的$\Sigma_1^0$语句。由$\mathfrak{A}_1'\models\Gamma$可得$(\mathfrak{B}_0)_{B_0}\models\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$。所以$(\mathfrak{B}_0)_{B_0}$可膨胀为$\varphi(c_{a_1},...,c_{a_n})$的模型。所以$Th\left((\mathfrak{B}_0)_{B_0}\right)\cup\Delta_{\mathfrak{A}_1}$的任何有限子集有模型。所以$Th\left((\mathfrak{B}_0)_{B_0}\right)\cup\Delta_{\mathfrak{A}_1}$有模型。**证毕**。

回到定理的证明。设$\mathfrak{B}_1'\models Th\left((\mathfrak{B}_0)_{B_0}\right)\cup\Delta_{\mathfrak{A}_1'}$。$\mathfrak{B}_1'$是$\mathcal{L}_{A_1}$的模型，可表示为$\mathfrak{B}_1'=(\mathfrak{B}_1,a)_{a\in A_1}$，其中$\mathfrak{B}_1$为$\mathcal{L}$的模型，$(\mathfrak{B}_1)_{B_0}\models Th\left((\mathfrak{B}_0)_{B_0}\right)$。由$\mathfrak{B}_1'\models\Delta_{\mathfrak{A}_1'}$可知$\mathfrak{A}_1'$可同构嵌入于$\mathfrak{B}_1'$中，因此可取$\mathfrak{B}_1'$使得$A_1\subseteq B_1$，$\mathfrak{A}_1'\subseteq\mathfrak{B}_1'$。所以$\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{B}_1$。由$(\mathfrak{B}_1)_{B_0}\models Th\left((\mathfrak{B}_0)_{B_0}\right)$可得$\mathfrak{B}_0\preccurlyeq\mathfrak{B}_1$。所以有$\mathfrak{B}_0\subseteq\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{B}_1$，$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}_1$，$\mathfrak{B}_0\preccurlyeq\mathfrak{B}_1$。对$\mathcal{L}$的任意$\Pi_2^0$语句$\varphi$，如$\mathfrak{A}_1\models\varphi$，则$\mathfrak{A}\models\varphi$，所以由假设$\mathfrak{B}_0\models\varphi$，又由于$\mathfrak{B}_0\preccurlyeq\mathfrak{B}_1$，所以$\mathfrak{B}_1\models\varphi$。所以对$\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}_1$可重复上面的构造得到$\mathfrak{A}_2,\mathfrak{B}_2$使得$\mathfrak{B}_1\subseteq\mathfrak{A}_2\subseteq\mathfrak{B}_2$，$\mathfrak{A}_1\equiv\mathfrak{A}_2$，$\mathfrak{B}_1\preccurlyeq\mathfrak{B}_2$。类似地可得$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_0\subseteq\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{B}_1\subseteq\mathfrak{A}_2\subseteq...$使得$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}_1\equiv\mathfrak{A}_2\equiv...$，$\mathfrak{B}_0\preccurlyeq\mathfrak{B}_1\preccurlyeq...$。

由$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}_1\equiv\mathfrak{A}_2\equiv...$可得$\mathfrak{A}_i\models T$对$i=0,1,...$。所以由假设$T$在模型链并下保持，应有$\cup_i\mathfrak{A}_i\models T$。但$\cup_i\mathfrak{A}_i=\cup_i\mathfrak{B}_i$。所以$\cup_i\mathfrak{B}_i\models T$。又由于$\mathfrak{B}_0\preccurlyeq\mathfrak{B}_1\preccurlyeq...$，应有$\mathfrak{B}_0\preccurlyeq\cup_i\mathfrak{B}_i$。所以$\mathfrak{B}_0=\mathfrak{B}\models T$。**证毕**。

定理 3.3.4 （*C&K3.2.4*）*$\mathcal{L}$的理论T在同态下保持，当且仅当T有正公理集。*

证明：易证正公式在同态下保持，即对正公式$\varphi(x_1,...,x_n)$，$f:\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{B}$，及$a_1,...,a_n\in A$有$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$蕴涵$\mathfrak{B}\models\varphi[f(a_1),...,f(a_n)]$。所以该定理的充分性显然。

必要性：设T在同态下保持。用$\mathfrak{A}pos\mathfrak{B}$表示对$\mathcal{L}$的任何正语句$\varphi$，$\mathfrak{A}\models\varphi$蕴涵$\mathfrak{B}\models\varphi$。由上面的引理，只要证，对$\mathcal{L}$的任何模型$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\models T$且$\mathfrak{A}pos\mathfrak{B}$蕴涵$\mathfrak{B}\models T$。为此设$\mathfrak{A}\models T$且$\mathfrak{A}pos\mathfrak{B}$。要构造$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0\preccurlyeq\mathfrak{A}_1\preccurlyeq\mathfrak{A}_2\preccurlyeq...$，$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_0\preccurlyeq\mathfrak{B}_1\preccurlyeq\mathfrak{B}_2\preccurlyeq...$，及$f_0:\mathfrak{A}_0\widetilde{\subseteq}\mathfrak{B}_1$，$f_1:\mathfrak{A}_1\widetilde{\subseteq}\mathfrak{B}_2$，...，使得$f_0\subseteq f_1\subseteq...$，且$ran(f_1)\supseteq B_1$，$ran(f_2)\supseteq B_2$，...。由此可得$(\cup_i f_i):\cup_i\mathfrak{A}_i\simeq\cup_i\mathfrak{B}_i$。而$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0\preccurlyeq\cup_i\mathfrak{A}_i$，所以$\cup_i\mathfrak{A}_i\models T$，再由$T$在同态下保持可得$\cup_i\mathfrak{B}_i\models T$，再由于$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_0\preccurlyeq\cup_i\mathfrak{B}_i$，所

以$\mathfrak{B} \models T$。

令

$$\Gamma = \left\{\varphi : \varphi \text{为} \mathcal{L}_{A_0} \text{的正语句使得} (\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0} \models \varphi\right\}。$$

可证明

（1）$Th\left((\mathfrak{B}_0, b)_{b \in B_0}\right) \cup \Gamma$有模型。

证明：设$\varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n}) \in \Gamma$，其中$\varphi(x_1, ..., x_n)$为$\mathcal{L}$的公式，$a_1, ..., a_n \in A_0$。则$\mathfrak{A}_0 \models \exists x_1 ... \exists x_n \varphi(x_1, ..., x_n)$。$\exists x_1 ... \exists x_n \varphi(x_1, ..., x_n)$为$\mathcal{L}$的正语句，所以由假设$\mathfrak{A} pos \mathfrak{B}$有$\mathfrak{B}_0 \models \exists x_1 ... \exists x_n \varphi(x_1, ..., x_n)$。所以$(\mathfrak{B}_0, b)_{b \in B_0}$可膨胀为$\varphi(c_{a_1}, ..., c_{a_n})$的模型。所以$Th\left((\mathfrak{B}_0, b)_{b \in B_0}\right) \cup \Gamma$的任何有限子集有模型。所以$Th\left((\mathfrak{B}_0, b)_{b \in B_0}\right) \cup \Gamma$有模型。**证毕**。

回到定理证明。设$\mathfrak{B}_1' \models Th\left((\mathfrak{B}_0, b)_{b \in B_0}\right) \cup \Gamma$。$\mathfrak{B}_1'$是$\mathcal{L}_{B_0 \cup A_0}$的模型。由$\mathfrak{B}_1' \models Th\left((\mathfrak{B}_0, b)_{b \in B_0}\right)$可知$\mathfrak{B}_0$可初等嵌入于$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1' | \mathcal{L}$中。所以可取$\mathfrak{B}_1'$使得$B_0 \subseteq B_1$，$\mathfrak{B}_0 \preccurlyeq \mathfrak{B}_1$。所以$\mathfrak{B}_1'$可表示为$(\mathfrak{B}_1, b, f_0(a))_{b \in B_0, a \in A_0}$，其中$f_0(a)$为新常项$c_a$在$\mathfrak{B}_1'$中的解释。所以$f_0 : A_0 \to B_1$。由$\mathfrak{B}_1' \models \Gamma$可得$f_0 : \mathfrak{A}_0 \widetilde{\subseteq} \mathfrak{B}_1$，而且

$$(\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0} \, pos \, (\mathfrak{B}_1, f_0(a))_{a \in A_0}。$$

再令

$$\Sigma = \left\{\neg\varphi : \varphi \text{为} \mathcal{L}_{A_0 \cup B_1} \text{的正语句使得} (\mathfrak{B}_1, f_0(a), b)_{a \in A_0, b \in B_1} \models \neg\varphi\right\}。$$

可证明

（2）$Th\left((\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0}\right) \cup \Sigma$有模型。

证明：设$\neg\varphi(c_{b_1}, ..., c_{b_n}) \in \Sigma$，其中$\varphi(x_1, ..., x_n)$为$\mathcal{L}_{A_0}$的公式，$b_1, ..., b_n \in B_1$。则$(\mathfrak{B}_1, f_0(a))_{a \in A_0} \models \exists x_1 ... \exists x_n \neg\varphi(x_1, ..., x_n)$。$\exists x_1 ... \exists x_n \neg\varphi(x_1, ..., x_n)$为$\mathcal{L}_{A_0}$的正语句的否定，所以由$(\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0} \, pos \, (\mathfrak{B}_1, f_0(a))_{a \in A_0}$有$(\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0} \models \exists x_1 ... \exists x_n \neg\varphi(x_1, ..., x_n)$。所以$(\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0}$可膨胀为$\neg\varphi(c_{b_1}, ..., c_{b_n})$的模型。所以$Th\left((\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0}\right) \cup \Sigma$的任何有限子集有模型。所以$Th\left((\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0}\right) \cup \Sigma$有模型。**证毕**。

回到定理证明。设$\mathfrak{A}_1' \models Th\left((\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0}\right) \cup \Sigma$。$\mathfrak{A}_1'$是$\mathcal{L}_{A_0 \cup B_1}$的模型。由$\mathfrak{A}_1' \models Th\left((\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0}\right)$，可设$A_0 \subseteq A_1$，$(\mathfrak{A}_0, a)_{a \in A_0} \preccurlyeq \mathfrak{A}_1' | \mathcal{L}_{A_0}$。所以$\mathfrak{A}_1'$可表示为$(\mathfrak{A}_1, a, g_1(b))_{a \in A_0, b \in B_1}$，其中$g_1(b)$为新常项$c_b$在$\mathfrak{A}_1'$中的解释。$g_1 : B_1 \to A_1$。由$\mathfrak{A}_1' \models \Sigma$可得

$$(\mathfrak{A}_1, a, g_1(b))_{a \in A_0, b \in B_1} \, pos \, (\mathfrak{B}_1, f_0(a), b)_{a \in A_0, b \in B_1}。$$

然后将$(\mathfrak{A}_1, a, g_1(b))_{a \in A_0, b \in B_1}$与$(\mathfrak{B}_1, f_0(a), b)_{a \in A_0, b \in B_1}$视为上面的$\mathfrak{A}_0$与$\mathfrak{B}_0$，同上可构造$\mathfrak{B}_2, f_1$使得

$$(\mathfrak{B}_1, f_0(a), b)_{a \in A_0, b \in B_1} \preccurlyeq (\mathfrak{B}_2, f_0(a), b)_{a \in A_0, b \in B_1}，$$
$$f_1 : (\mathfrak{A}_1, a, g_1(b))_{a \in A_0, b \in B_1} \widetilde{\subseteq} (\mathfrak{B}_2, f_0(a), b)_{a \in A_0, b \in B_1}，$$

而且

$$(\mathfrak{A}_1, g_1(b), a)_{b \in B_1, a \in A_1} \, pos \, (\mathfrak{B}_2, b, f_1(a))_{b \in B_1, a \in A_1}。$$

因此对$a \in A_0$，$f_1(a) = f_0(a)$，即$f_0 \subseteq f_1$。对$b \in B_1$，$f_1(g_1(b)) = b$，所以$ran(f_1) \supseteq B_1$。所以有

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A}_0 & \preccurlyeq & \mathfrak{A}_1 & & \\ & \searrow^{f_0} & \uparrow_{g_1} & \searrow^{f_1} & \\ \mathfrak{B}_0 & \preccurlyeq & \mathfrak{B}_1 & \preccurlyeq & \mathfrak{B}_2 \end{array}$$

同理可构造$\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_3, ...$等等满足所需条件。**证毕**。

推论 3.3.5 （*C&K3.2.5*）一个语句保持（*1*）子模型，（*2*）模型链并，或（*3*）同态，当且仅当它逻辑等价于一个（*1*）全称句，（*2*）Π^0_2语句，或（*3*）正语句或矛盾句。

第四章　可数完备理论的可数模型

本章只考虑可数语言。我们要考察可数语言的完备理论的可数模型。

§4.1　原子模型与素模型

设T是$\mathcal{L}$的完备理论。称$\mathcal{L}$的公式$\varphi(x_1,...,x_n)$**在T中完备**，假如对$\mathcal{L}$的任何公式$\psi(x_1,...,x_n)$，

$$T\models\varphi(x_1,...,x_n)\to\psi(x_1,...,x_n)\text{，或者}$$
$$T\models\varphi(x_1,...,x_n)\to\neg\psi(x_1,...,x_n)$$

恰有一个成立。注意，此时应有T与$\varphi(x_1,...,x_n)$一致，即$T\not\models\neg\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$，因为若不然，上面两个都将成立。而且，由$T$完备，此时应有$T\models\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$。

对$\mathcal{L}$的模型$\mathfrak{A}$，$\mathcal{L}$的公式$\varphi(x_1,...,x_n)$定义个体域A上的一个n元关系

$$\varphi^{\mathfrak{A}}=\{(a_1,...,a_n)\in A^n:\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]\};$$

反之，称一个n元关系$R\subseteq A^n$为可定义的，假如有$\mathcal{L}$的公式$\varphi(x_1,...,x_n)$使得$R=\varphi^{\mathfrak{A}}$。显然，可定义关系的有限交、有限并和补还是可定义的。另外显然，$\mathfrak{A}\models\varphi(x_1,...,x_n)\to\psi(x_1,...,x_n)$当且仅当$\varphi^{\mathfrak{A}}\subseteq\psi^{\mathfrak{A}}$。称一个非空的可定义$n$元关系$R\subseteq A^n$为极小可定义的，假如对任何其它可定义的$n$元关系$R'$，要么$R\subseteq R'$，要么$R\subseteq\overline{R'}=A^n-R'$。显然，对两个非空极小可定义的$n$元关系$R_1,R_2$，要么$R_1=R_2$，要么$R_1\cap R_2=\varnothing$。注意，可能存在可定义的$n$元关系$R_1,R_2,...$使得$R_1\supsetneq R_2\supsetneq R_3\supsetneq...$，因此这些都不是极小可定义的$n$元关系。

如$\mathfrak{A}\models T$而$\varphi(x_1,...,x_n)$在T中完备，则$\varphi^{\mathfrak{A}}$非空且极小可定义。反之，设T完备而对某个$\mathfrak{A}\models T$，$\varphi^{\mathfrak{A}}$是非空且极小可定义的。则对任何$\psi(x_1,...,x_n)$，$\mathfrak{A}\models\varphi(x_1,...,x_n)\to\psi(x_1,...,x_n)$或者$\mathfrak{A}\models\varphi(x_1,...,x_n)\to\neg\psi(x_1,...,x_n)$。再由$T$完备，应有$T\models\varphi(x_1,...,x_n)\to\psi(x_1,...,x_n)$或者$T\models\varphi(x_1,...,x_n)\to\neg\psi(x_1,...,x_n)$，即$\varphi(x_1,...,x_n)$在$T$中完备。所以我们有，

命题 4.1.1 设T是$\mathcal{L}$的完备理论，$\varphi(x_1,...,x_n)$是$\mathcal{L}$的公式。如$\varphi(x_1,...,x_n)$在T中完备，则对每个$\mathfrak{A}\models T$，$\varphi^{\mathfrak{A}}$非空且极小可定义。反之，如对某个$\mathfrak{A}\models T$，$\varphi^{\mathfrak{A}}$是非空且极小可定义的，则$\varphi(x_1,...,x_n)$在T中完备。

称公式$\theta(x_1,...,x_n)$在T中**可完备**，假如有在T中完备的公式$\varphi(x_1,...,x_n)$使得

$$T\models\varphi(x_1,...,x_n)\to\theta(x_1,...,x_n)\text{。}$$

注意，此时也应有T与$\theta(x_1,...,x_n)$一致，而且由T完备应有$T\models\exists x_1...\exists x_n\theta(x_1,...,x_n)$。显然，$\theta(x_1,...,x_n)$在$T$中可完备，当且仅当在$T$的某个（及所有）模型$\mathfrak{A}$中，$\theta^{\mathfrak{A}}$包含一个极小可定义的$n$元关系。

称T为**原子的**，假如每个与T一致的公式可完备。显然，T是原子的，当且仅当在T的某个（所有）模型$\mathfrak{A}$中，每个非空可定义的n元关系都包含一个极小可定义的n元关系。

称模型$\mathfrak{A}$为**原子的**，假如对任何$n>0$，任何$a_1,...,a_n\in A$满足一个在$Th(\mathfrak{A})$中完备的公式，即每个n元组$(a_1,...,a_n)$都属于某个极小可定义的n元关系，因此所有极小可定义的n元关系构成A^n的一个划分。

例 4.1.1 设T完备。公式$\varphi(x_1,...,x_n)=(x_1=c_1\wedge...\wedge x_n=c_n)$在$T$中完备。因为

$$\models\forall x_1...\forall x_n(\varphi(x_1,...,x_n)\rightarrow\psi(x_1,...,x_n))\leftrightarrow\psi(c_1,...,c_n),$$
$$\models\forall x_1...\forall x_n(\varphi(x_1,...,x_n)\rightarrow\neg\psi(x_1,...,x_n))\leftrightarrow\neg\psi(c_1,...,c_n)。$$

而由T完备，要么$T\models\psi(c_1,...,c_n)$，要么$T\models\neg\psi(c_1,...,c_n)$。设$\mathfrak{A}\models T$且$\mathfrak{A}$中个体都是常项符号的解释，则$\mathfrak{A}$是原子的，因为个体$c_1^{\mathfrak{A}},...,c_n^{\mathfrak{A}}$满足完备公式$(x_1=c_1\wedge...\wedge x_n=c_n)$。类似地，如$t_1,...,t_n$为不含变元的项，称为闭项，则公式$(x_1=t_1\wedge...\wedge x_n=t_n)$也在$T$中完备。如$\mathfrak{A}\models T$且$\mathfrak{A}$中个体都是闭项的值，则$\mathfrak{A}$是原子的，因为个体$t_1^{\mathfrak{A}},...,t_n^{\mathfrak{A}}$满足完备公式$(x_1=t_1\wedge...\wedge x_n=t_n)$。

例 4.1.2 数论的标准模型$\mathfrak{N}$是原子模型，因为每个个体都是某个闭项$S...S0$的值。但完备数论$Th(\mathfrak{N})$的任何非标准模型$\mathfrak{A}$不是原子模型。因为，设$a\in A$是$\mathfrak{A}$中一个非标准数，设公式$\varphi(x)$使得$\mathfrak{A}\models\varphi[a]$，则$\mathfrak{A}\models\exists x\varphi(x)$，所以$\mathfrak{N}\models\exists x\varphi(x)$，所以有自然数$n$使得$\mathfrak{N}\models\varphi(\overline{n})$，因此$\mathfrak{A}\models\varphi(\overline{n})$，即$\mathfrak{A}\models\varphi[n]$。令$\psi(x)$为$\varphi(x)\wedge\neg x\equiv\overline{n}$，则$\varnothing\neq\psi^{\mathfrak{A}}\subsetneq\varphi^{\mathfrak{A}}$。所以$\varphi^{\mathfrak{A}}$不是极小可定义的，因此不是在$Th(\mathfrak{A})$中完备的。所以$a$不满足任何在$Th(\mathfrak{A})$中完备的公式。所以$\mathfrak{A}$不是原子模型。

例 4.1.3 每个有限模型是原子模型。

证明： 设$\mathfrak{A}$是$\mathcal{L}$的有限模型，$a_1,...,a_n\in A$。设$\varphi_1(x_1,...,x_n),\varphi_2(x_1,...,x_n),...$为$\mathcal{L}$的所有自由变元都在$x_1,...,x_n$中的公式，对$i=1,2,...$，如$\mathfrak{A}\models\varphi_i[a_1,...,a_n]$，令$\theta_i=\varphi_i$，否则令$\theta_i=\neg\varphi_i$。因此$\mathfrak{A}\models\theta_i[a_1,...,a_n]$对任何$i=1,2,...$。所以$(a_1,...,a_n)\in\cap_{i=1}^{\infty}\theta_i^{\mathfrak{A}}$。因为每个$\theta_i^{\mathfrak{A}}$是有限集，一定有$m$使得$\cap_{i=1}^{\infty}\theta_i^{\mathfrak{A}}=\cap_{i=1}^{m}\theta_i^{\mathfrak{A}}$。令$\varphi=\theta_1\wedge...\wedge\theta_m$，则$\varphi^{\mathfrak{A}}=\cap_{i=1}^{\infty}\theta_i^{\mathfrak{A}}$。对任意$i=1,2,...$，如$\mathfrak{A}\models\varphi_i[a_1,...,a_n]$，则$\theta_i=\varphi_i$，所以$\varphi^{\mathfrak{A}}\subseteq\varphi_i^{\mathfrak{A}}$；如$\mathfrak{A}\models\neg\varphi_i[a_1,...,a_n]$，则$\theta_i=\neg\varphi_i$，所以$\varphi^{\mathfrak{A}}\subseteq(\neg\varphi_i)^{\mathfrak{A}}$。所以$\varphi^{\mathfrak{A}}$是极小可定义的。所以$\varphi$在$Th(\mathfrak{A})$中完备，即$a_1,...,a_n$满足一个在$Th(\mathfrak{A})$中完备的公式。所以$\mathfrak{A}$是原子模型。**证毕**。

例 4.1.4 无端点稠密线性序模型是原子模型。

证明： 设$\mathfrak{A}=\langle A,\leq\rangle$是无端点稠密线性序模型，$a_1,...,a_n\in A$。$a_1,...,a_n$满足变元$v_1,...,v_n$的一个排列$\theta(v_1,...,v_n)$。任给$\psi(v_1,...,v_n)$，由定理2.1.4及引理2.1.2，$Th(\mathfrak{A})\models\theta\rightarrow\psi$或者$Th(\mathfrak{A})\models\theta\rightarrow\neg\psi$，所以$\theta$是在$Th(\mathfrak{A})$中完备的公式。所以$\mathfrak{A}$是原子模型。**证毕**。

例 4.1.5 设$\mathcal{L}=\{P_0,P_1,...\}$，其中每个$P_i$是一元谓词符号，又设

$$T=\left\{\begin{array}{c}\exists x\left(P_{i_1}(x)\wedge...\wedge P_{i_m}(x)\wedge\neg P_{j_1}(x)\wedge...\wedge\neg P_{j_n}(x)\right):\\ i_1,...,i_m,j_1,...,j_n\text{为不同的自然数}\end{array}\right\}。$$

则T完备，且没有任何在T中完备的公式$\varphi(x)$，所以T没有原子模型。

证明: 先引进一些记号。令$\mathcal{L}_n=\{P_0,...,P_n\}$。对任意0-1序列$l=(l_0,...,l_n)$，令$\varphi_l(x)=P_0'(x)\wedge...\wedge P_n'(x)$，其中，当$l_i=0$时$P_i'(x)$为$P_i(x)$，当$l_i=1$时$P_i'(x)$为$\neg P_i(x)$。对任意$\mathfrak{A}\models T$，记$A_l=\varphi_l^{\mathfrak{A}}$。显然，对任何$l,l'$，$A_l\neq\varnothing$，$A_l=A_{l0}\cup A_{l1}$，如$l\subseteq l'$则$A_l\supseteq A_{l'}$，如$l\subsetneq l'$且$l'\subsetneq l$则$A_l\cap A_{l'}=\varnothing$。因此每个$A_l$是无穷集。

显然T只有无穷模型。要证T完备，只要证T的任何两个可数无穷模型等价。为此设$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$是$T$的两个可数无穷模型，$\psi$是$\mathcal{L}$的任一语句。有一个$n\geq 0$使得$\psi$是$\mathcal{L}_n$的语句。设$l_1,...,l_{2^{n+1}}$是所有长度为$n+1$的0-1序列，则$A=A_{l_1}\cup...\cup A_{l_{2^{n+1}}}$为$A$的一个划分，而且每个$A_{l_i}$是可数无穷集。对$\mathfrak{B}$有同样的划分$B=B_{l_1}\cup...\cup B_{l_{2^{n+1}}}$，而且每个$B_{l_i}$是可数无穷集。所以存在1-1映射$f:A\to B$使得对每个$i=1,...,2^{n+1}$，$f|A_{l_i}:A_{l_i}\to B_{l_i}$是1-1映射。显然，对每个$k=0,...,n$，$a\in A$，有$\mathfrak{A}\models P_k[a]$当且仅当$\mathfrak{B}\models P_k[f(a)]$。所以$f:\mathfrak{A}|\mathcal{L}_n\cong\mathfrak{B}|\mathcal{L}_n$。所以$\mathfrak{A}\models\psi$当且仅当$\mathfrak{B}\models\psi$。所以$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$。

为证没有任何在T中完备的公式$\varphi(x)$，设$\varphi(x)$在T中完备。设$\varphi(x)$是$\mathcal{L}_n$的公式，$\mathfrak{A}\models T$。有$a\in A$使得$\mathfrak{A}\models\varphi[a]$。存在长度为$n+1$的0-1序列$l$使得$a\in A_l$。如$a'\in A_l$，同上可知存在$f:\mathfrak{A}|\mathcal{L}_n\cong\mathfrak{A}|\mathcal{L}_n$，使得$f(a)=a'$，$f(a')=a$，$f(u)=u$对$u\neq a,a'$。因此应有$\mathfrak{A}\models\varphi[a']$。所以$A_l\subseteq\varphi^{\mathfrak{A}}$，即$\mathfrak{A}\models\varphi_l(x)\to\varphi(x)$。所以$T\models\varphi_l(x)\to\varphi(x)$。由假设$\varphi(x)$在$T$中完备，对任何$\theta(x)$有$T\models\varphi(x)\to\theta(x)$或者$T\models\varphi(x)\to\neg\theta(x)$。所以应有$T\models\varphi_l(x)\to\theta(x)$或者$T\models\varphi_l(x)\to\neg\theta(x)$。但取$\theta(x)$为$P_{n+1}(x)$时，容易证明$T\models\varphi_l(x)\to\theta(x)$与$T\models\varphi_l(x)\to\neg\theta(x)$都不成立，因为，前者蕴涵$A_l\subseteq A_{l0}$，后者蕴涵$A_l\subseteq A_{l1}$，与$A_{l0}\neq\varnothing$，$A_{l1}\neq\varnothing$，$A_l=A_{l0}\cup A_{l1}$矛盾。所以$\varphi(x)$不在$T$中完备。所以没有任何在$T$中完备的公式$\varphi(x)$。**证毕**。

定理 4.1.2 (*C&K2.3.2*)设T完备，则T有可数原子模型当且仅当T是原子的。

证明: 必要性: 设T有可数原子模型$\mathfrak{A}$，$\varphi(x_1,...,x_n)$与T一致，即$T\cup\{\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)\}$一致。由$T$完备，应有$T\models\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$，所以$\mathfrak{A}\models\exists x_1...\exists x_n\varphi(x_1,...,x_n)$，即有$a_1,...,a_n\in A$使得$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$。因为$\mathfrak{A}$是原子的，有完备公式$\theta(x_1,...,x_n)$使得$\mathfrak{A}\models\theta[a_1,...,a_n]$。由$\theta(x_1,...,x_n)$完备，应有$T\models\theta\to\varphi$或$T\models\theta\to\neg\varphi$。由$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$与$\mathfrak{A}\models\theta[a_1,...,a_n]$，应有$T\models\theta\to\varphi$，即$\varphi$可完备。所以$T$是原子的。

充分性: 设T是原子的。要使得T的模型$\mathfrak{A}$为原子的，必须对任何$a_1,...,a_n\in A$有完备公式$\varphi(x_1,...,x_n)$使得$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$，即$\mathfrak{A}\not\models\neg\varphi[a_1,...,a_n]$，即$a_1,...,a_n$不能实现

$$\Gamma_n=\{\neg\varphi(x_1,...,x_n):\varphi(x_1,...,x_n)\text{为在}T\text{中完备的公式}\},$$

即只要$\mathfrak{A}$省略所有$\Gamma_n, n = 1, 2, ...$。由广义省略型定理3.1.7，只要证T局部省略每个Γ_n。为此设$\theta(x_1, ..., x_n)$与T一致。由T是原子的，有完备公式$\varphi(x_1, ..., x_n)$使得$T \models \varphi \to \theta$。所以$T \nvDash \varphi \to \neg\theta$，即$T \nvDash \theta \to \neg\varphi$。所以$T$不局部实现$\Gamma_n$，即$T$局部省略$\Gamma_n$。**证毕**。

定理 4.1.3 （*C&K2.3.3*）*设$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$为可数原子模型且$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，则$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$。*

证明：如$\mathfrak{A}$或$\mathfrak{B}$是有限模型，由命题1.2.6，结论成立。所以设$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$为可数无穷的。记$T = Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$。设$A = \{a_0, a_1, ...\}$，$B = \{b_0, b_1, ...\}$。首先要将$a_0, a_1, ...$及$b_0, b_1, ...$重新排列成$a_0', a_1', ...$及$b_0', b_1', ...$，使得对任何$n \geq 0$，$a_0', ..., a_n'$及$b_0', ..., b_n'$满足同一个完备公式$\varphi(x_0, ..., x_n)$。

设$n \geq 0$，且已得到$a_0', ..., a_{n-1}'$及$b_0', ..., b_{n-1}'$使得它们满足同一个完备公式$\psi(x_0, ..., x_{n-1})$。$n = 0$时可取ψ为任一逻辑有效式。令a_n'为$a_0, a_1, ...$中第一个不在$a_0', ..., a_{n-1}'$中出现的元素。因为$\mathfrak{A}$是原子模型，$a_0', ..., a_{n-1}', a_n'$满足一个完备公式$\varphi(x_0, ..., x_n)$。所以$\mathfrak{A} \models \exists x_n \varphi[a_0', ..., a_{n-1}', x_n]$。$n \geq 1$时，因为$\psi(x_0, ..., x_{n-1})$是完备公式，$T \models \psi \to \exists x_n \varphi$或$T \models \psi \to \neg\exists x_n \varphi$。$n = 0$时这个也成立，因为$\exists x_n \varphi$是语句而$T$完备。但由于$\mathfrak{A} \models \psi[a_0', ..., a_{n-1}']$及$\mathfrak{A} \models \exists x_n \varphi[a_0', ..., a_{n-1}', x_n]$，只能是$T \models \psi \to \exists x_n \varphi$。所以$\mathfrak{B} \models \psi \to \exists x_n \varphi$。由假设$\mathfrak{B} \models \psi[b_0', ..., b_{n-1}']$，所以$\mathfrak{B} \models \exists x_n \varphi[b_0', ..., b_{n-1}', x_n]$。所以由$b_n' \in B$使得$b_0', ..., b_{n-1}', b_n'$也满足完备公式$\varphi(x_0, ..., x_n)$。对$i = 1, ..., n-1$，$\mathfrak{A} \models (\neg x_n \equiv x_i)[a_0', ..., a_n']$，而由$\varphi(x_0, ..., x_n)$完备，$T \models \varphi \to \neg x_n \equiv x_i$或$T \models \varphi \to x_n \equiv x_i$，所以只能是$T \models \varphi \to \neg x_n \equiv x_i$，所以$\mathfrak{B} \models \varphi \to \neg x_n \equiv x_i$，所以$b_n' \neq b_i'$。即$b_0', ..., b_{n-1}', b_n'$是$B$中不同的元素。再取$b_0, b_1, ...$中第一个不在$b_0', ..., b_{n-1}', b_n'$中出现的元素为$b_{n+1}'$，则同理可得$a_{n+1}' \neq a_0', ..., a_{n-1}', a_n'$使得$a_0', ..., a_{n+1}'$及$b_0', ..., b_{n+1}'$满足同一个完备公式。这保证$A$中每个元素都在$a_0', a_1', ...$中，$B$中每个元素都在$b_0', b_1', ...$中，即$a_0', a_1', ...$和$b_0', b_1', ...$分别是$A$和$B$中元素的重排。

令$f : A \to B$定义为$f(a_i') = b_i'$对$i = 0, 1, ...$，则f是1-1映射。易见$f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$。对$n$元谓词符号$P$及$a_{i_1}', ..., a_{i_n}' \in A$，取$k > i_1, ..., i_n$。设$a_0', ..., a_k'$及$b_0', ..., b_k'$满足同一个完备公式$\varphi(x_0, ..., x_k)$。如$P^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}', ..., a_{i_n}')$，则由$\varphi$完备应有$T \models \varphi(x_0, ..., x_k) \to P(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$，因此可得$P^{\mathfrak{B}}(b_{i_1}', ..., b_{i_n}')$，反之亦然。对$n$元函数符号$F$，如$F^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}', ..., a_{i_n}') = a_{i_{n+1}}'$，则同样应有$T \models \varphi(x_0, ..., x_k) \to F(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = x_{i_{n+1}}$，因此可得$F^{\mathfrak{B}}(b_{i_1}', ..., b_{i_n}') = b_{i_{n+1}}'$。对常项符号$c$同样可得，如$c^{\mathfrak{A}} = a_i'$，则$c^{\mathfrak{B}} = b_i'$。所以$f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$。**证毕**。

推论 4.1.4 *无端点稠密线性序理论是ω-范畴的，即任何两个可数的无端点稠密线性序模型互相同构。*

证明：由上面的例子，每个无端点稠密线性序模型是原子模型。由于无端点稠密线性序理论是完备的，任何两个无端点稠密线性序模型初等等价。所以由定理，任何两个可数的无端点稠密线性序模型互相同构。**证毕**。

一个模型$\mathfrak{A}$称为素模型，假如$\mathfrak{A}$可初等嵌入于$Th(\mathfrak{A})$的每个模型，即$\mathfrak{A}$可初等嵌入于每个初等等价于$\mathfrak{A}$的模型。模型$\mathfrak{A}$称为可数素模型，假如$\mathfrak{A}$可初等嵌入于$Th(\mathfrak{A})$的每个可数模型，即$\mathfrak{A}$可初等嵌入于每个初等等价于$\mathfrak{A}$的可数模

型。

定理 4.1.5 （*C&K2.3.4*）下列等价：

（*1*）$\mathfrak{A}$是可数原子模型；

（*2*）$\mathfrak{A}$是素模型；

（*3*）$\mathfrak{A}$是可数素模型。

证明：（1）⇒（2）设$\mathfrak{A}$是可数原子模型，$\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A})$。设$A = \{a_0, a_1, ...\}$。同上面的定理的证明，可选择$b_0, b_1, ... \in B$使得对任何$n \geq 0$，$a_0, ..., a_n$与$b_0, ..., b_n$满足同一个在$Th(\mathfrak{A})$中完备的公式$\varphi(x_0, ..., x_n)$。令$f : A \to B$定义为：$f(a_i) = b_i$，对$i = 0, 1, ...$。可以证明$f : \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$。为此设$\psi(y_1, ..., y_k)$为任一公式。设$a_{i_1}, ..., a_{i_k} \in A$使得$\mathfrak{A} \models \psi[a_{i_1}, ..., a_{i_k}]$。取$n > i_1, ..., i_k$，则$a_{i_1}, ..., a_{i_k}$在$a_0, ..., a_n$中。设$a_0, ..., a_n$与$b_0, ..., b_n$满足同一个在$Th(\mathfrak{A})$中完备的公式$\varphi(x_0, ..., x_n)$。由$\varphi$完备，$Th(\mathfrak{A}) \models \varphi(x_0, ..., x_n) \to \psi(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$或$Th(\mathfrak{A}) \models \varphi(x_0, ..., x_n) \to \neg\psi(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$。由假设$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_n]$及$\mathfrak{A} \models \psi[a_{i_1}, ..., a_{i_k}]$应有$Th(\mathfrak{A}) \models \varphi(x_0, ..., x_n) \to \psi(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$。所以$\mathfrak{B} \models \varphi(x_0, ..., x_n) \to \psi(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$。再由$\mathfrak{B} \models \varphi[b_0, ..., b_n]$应有$\mathfrak{B} \models \psi[b_{i_1}, ..., b_{i_k}]$。$\psi$换成$\neg\psi$时同样的结论成立。所以$\mathfrak{A} \models \psi[a_{i_1}, ..., a_{i_k}]$当且仅当$\mathfrak{B} \models \psi[b_{i_1}, ..., b_{i_k}]$。所以$f : \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$。

（2）⇒（3）显然。

（3）⇒（1）设$\mathfrak{A}$是可数素模型，$a_1, ..., a_n \in A$，要证$a_1, ..., a_n$满足一个完备公式。令

$$\Gamma(x_1, ..., x_n) = \{\gamma(x_1, ..., x_n) : \mathfrak{A} \models \gamma[a_1, ..., a_n]\}。$$

由假设$\mathfrak{A}$是可数素模型，对理论$Th(\mathfrak{A})$的任何可数模型$\mathfrak{B}$，有$f : \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$，所以$\mathfrak{B} \models \gamma[f(a_1), ..., f(a_n)]$对任何$\gamma(x_1, ..., x_n) \in \Gamma(x_1, ..., x_n)$。所以$\mathfrak{B}$实现$\Gamma(x_1, ..., x_n)$。所以$Th(\mathfrak{A})$的任何可数模型实现$\Gamma(x_1, ..., x_n)$，即$Th(\mathfrak{A})$没有可数模型省略$\Gamma(x_1, ..., x_n)$。由省略型定理，$Th(\mathfrak{A})$不局部省略$\Gamma(x_1, ..., x_n)$，即$Th(\mathfrak{A})$局部实现$\Gamma(x_1, ..., x_n)$。所以有$\varphi(x_1, ..., x_n)$与$Th(\mathfrak{A})$一致且$Th(\mathfrak{A}) \models \varphi(x_1, ..., x_n) \to \gamma(x_1, ..., x_n)$对所有$\gamma(x_1, ..., x_n) \in \Gamma(x_1, ..., x_n)$。对任何$\psi(x_1, ..., x_n)$，$\psi(x_1, ..., x_n) \in \Gamma(x_1, ..., x_n)$或者$\neg\psi(x_1, ..., x_n) \in \Gamma(x_1, ..., x_n)$。所以，$Th(\mathfrak{A}) \models \varphi(x_1, ..., x_n) \to \psi(x_1, ..., x_n)$或$Th(\mathfrak{A}) \models \varphi(x_1, ..., x_n) \to \neg\psi(x_1, ..., x_n)$。由$\varphi(x_1, ..., x_n)$与$Th(\mathfrak{A})$一致，不能两者同时成立。所以$\varphi(x_1, ..., x_n)$在$Th(\mathfrak{A})$中完备。又因为由$\varphi(x_1, ..., x_n)$与$Th(\mathfrak{A})$一致，$Th(\mathfrak{A}) \nvDash \varphi(x_1, ..., x_n) \to \neg\varphi(x_1, ..., x_n)$。所以$\varphi(x_1, ..., x_n) \in \Gamma(x_1, ..., x_n)$，即$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$。所以$a_1, ..., a_n$满足一个完备公式。**证毕**。

§4.2 可数饱和模型与可数泛模型

称$\mathcal{L}$的模型$\mathfrak{A}$为ω-**饱和**模型，假如对任何有限集$Y \subseteq A$，任何$\mathcal{L}_Y$公式集$\Gamma(x)$，如$\Gamma(x)$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致，则$\Gamma(x)$在$\mathfrak{A}_Y$中实现。称$\mathfrak{A}$为可数饱和的，假如$\mathfrak{A}$可数且是ω-饱和。

例 4.2.1 纯等词理论的可数无穷模型是可数饱和的。

证明：设$\mathfrak{A}$为纯等词语言的一个可数无穷模型，$Y\subseteq A$为A的有限子集，$\mathcal{L}_Y$公式集$\Gamma(x)$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致，即有模型$\mathfrak{B}\models Th(\mathfrak{A}_Y)$且$\mathfrak{B}$实现$\Gamma(x)$。由$\mathfrak{B}\models Th(\mathfrak{A}_Y)$，$Th(\mathfrak{A})\subseteq Th(\mathfrak{A}_Y)$可知$\mathfrak{B}$一定也是无穷模型。不妨设$\mathfrak{B}$是可数无穷的。定义$f:A\to B$如下：对$a\in Y$，令$f(a)=c_a^{\mathfrak{B}}$；令$f|(A-Y)$为$(A-Y)$与$B-\{c_a^{\mathfrak{B}}:a\in Y\}$之间的1-1对应。这样的1-1对应存在，因为$(A-Y)$与$B-\{c_a^{\mathfrak{B}}:a\in Y\}$都是可数无穷的。由$\mathfrak{B}\models Th(\mathfrak{A}_Y)$容易验证$f:\mathfrak{A}_Y\cong\mathfrak{B}$。所以$\Gamma(x)$也在$\mathfrak{A}_Y$中实现。所以$\mathfrak{A}$是$\omega$-饱和的。**证毕**。

例 4.2.2 设$\mathbb{Q}$为有理数集，则无端点稠密线性序模型$\mathfrak{A}=\langle\mathbb{Q}\leq\rangle$是可数饱和的。

证明：设有限集$Y=\{q_1,...,q_k\}\subseteq\mathbb{Q}$，且$(\mathcal{L}_{Ord})_Y$的公式集$\Gamma(x)$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致，所以有可数模型$\mathfrak{B}\models Th(\mathfrak{A}_Y)$使得$\mathfrak{B}$实现$\Gamma(x)$。由$\mathfrak{B}\models Th(\mathfrak{A}_Y)$可知$\mathfrak{B}$也是可数的无端点稠密线性序模型，而且，令$b_i=c_{q_i}^{\mathfrak{B}}$对$i=1,...,k$，则$q_1,...,q_k$与$b_1,...,b_k$序同构。可以证明，这个序同构可扩张为$\mathbb{Q}$与$B$的序同构。为此设$p_1,p_2,...$为$\mathbb{Q}$中所有元素的一个排列，设$u_1,u_2,...$为$B$中所有元素的一个排列。取$p_1,p_2,...$中第一个不在$q_1,...,q_k$中出现的元素为$q_{k+1}$，则有$b_{k+1}\in B$使得$q_1,...,q_{k+1}$与$b_1,...,b_{k+1}$序同构。再取$u_1,u_2,...$中第一个不在$b_1,...,b_{k+1}$中出现的元素为$b_{k+2}$，则有$q_{k+2}\in\mathbb{Q}$使得$q_1,...,q_{k+2}$与$b_1,...,b_{k+2}$序同构。如此继续下去，可得$q_1,q_2,....$与$b_1,b_2,...$，使得$q_i\longmapsto b_i$，$i=1,2,...$，是$\mathbb{Q}$与$B$的序同构，它使得$q_i$被对应到$c_{q_i}^{\mathfrak{B}}$，所以它还是$\mathfrak{A}_Y$与$\mathfrak{B}$的同构。所以，由$\mathfrak{B}$实现$\Gamma(x)$可得$\mathfrak{A}_Y$实现$\Gamma(x)$。所以$\mathfrak{A}$是$\omega$-饱和的。**证毕**。

引理 4.2.1 $\mathcal{L}=\varnothing$是纯等词语言，$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$是$\mathcal{L}$的无穷模型，$a_1,...,a_n\in A$，$b_1,...,b_n\in B$，而且对任何$i,j=1,...,n$有$a_i=a_j$当且仅当$b_i=b_j$，则对$\mathcal{L}$的任何公式$\varphi(x_1,...,x_n)$，$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$当且仅当$\mathfrak{B}\models\varphi[b_1,...,b_n]$。

证明：对φ归纳。φ为原子公式、否定式、合取式的情形都显然。

设φ为$\exists x_{n+1}\psi(x_1,...,x_n,x_{n+1})$，又设$\mathfrak{A}\models\exists x_{n+1}\psi[a_1,...,a_n,x_{n+1}]$。因此有$a_{n+1}\in A$使得$\mathfrak{A}\models\psi[a_1,...,a_n,a_{n+1}]$。由$B$是无穷集，一定有$b_{n+1}\in B$使得对任何$i=1,...,n+1$，$a_i=a_{n+1}$当且仅当$b_i=b_{n+1}$。因此由归纳假设，$\mathfrak{B}\models\psi[b_1,...,b_n,b_{n+1}]$，所以$\mathfrak{B}\models\exists x_{n+1}\psi[b_1,...,b_n,x_{n+1}]$。反之亦然。所以$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$当且仅当$\mathfrak{B}\models\varphi[b_1,...,b_n]$。**证毕**。

称引理中的两个序列$a_1,...,a_n$与$b_1,...,b_n$对等同关系同构。

例 4.2.3 设$\mathcal{L}=\{c_0,c_1,...\}$，$T=\{\neg c_i\equiv c_j:i\neq j,i,j=0,1,...\}$，可数模型$\mathfrak{A}\models T$，$A=\{c_i^{\mathfrak{A}}:i=0,1,...\}\cup X$，其中$\{c_i^{\mathfrak{A}}:i=0,1,...\}\cap X=\varnothing$。则$X=\varnothing$时$\mathfrak{A}$是原子的，$X$是可数无穷集时$\mathfrak{A}$是可数饱和的。

证明：$X=\varnothing$时，$\mathfrak{A}$的每个个体都是常项符号的解释，所以$\mathfrak{A}$是原子的。

设X是可数无穷集，要证$\mathfrak{A}$是ω-饱和的。为此设有限集$Y\subseteq A$。不妨设$Y=\{c_0^{\mathfrak{A}},...,c_n^{\mathfrak{A}}\}\cup\{a_0,...,a_m\}$，其中$a_0,...,a_m\in X$。设$\mathcal{L}_Y$公式集$\Gamma(x)$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致，即有模型$\mathfrak{B}\models Th(\mathfrak{A}_Y)$且$\mathfrak{B}$实现$\Gamma(x)$。显然$\mathfrak{B}$无穷。设$B=\{c_i^{\mathfrak{B}}:i=0,1,...\}\cup Z$为不相交并。记$b_j=c_{a_j}^{\mathfrak{B}},j=0,...,m$。由$\mathfrak{B}\models Th(\mathfrak{A}_Y)$可知$b_0,...,b_m\in Z$，

而且对$i,i'=0,1,...$，$c_i^{\mathfrak{A}}=c_{i'}^{\mathfrak{A}}$当且仅当$c_i^{\mathfrak{B}}=c_{i'}^{\mathfrak{B}}$，对$j,j'=0,...,m$，$a_j=a_{j'}$当且仅当$b_j=b_{j'}$。由假设$\mathfrak{B}$实现$\Gamma(x)$，即有$b\in B$使得$\mathfrak{B}\models\Gamma[b]$。因为$X$为可数无穷集，一定有$a\in A$使得对$i=0,1,...$，$a=c_i^{\mathfrak{A}}$当且仅当$b=c_i^{\mathfrak{B}}$，而且对$j=0,...,m$，$a=a_j$当且仅当$b=b_j$。可以证明$\mathfrak{A}_Y\models\Gamma[a]$。对$\Gamma(x)$中任一公式$\varphi(x)$，条件$\mathfrak{A}_Y\models\varphi[a]$又可表达为

$$\mathfrak{A}_Y|\mathcal{L}_=\models\varphi'\left[c_0^{\mathfrak{A}},...,c_k^{\mathfrak{A}},a_0,...,a_m,a\right],$$

其中$\mathcal{L}_=$是纯等词语言，φ'是纯等词公式，是将公式$\varphi(x)$中出现的常项符号c_i,c_{a_j}等换成变元后所得。相应地，$\mathfrak{B}\models\varphi[b]$可表达为

$$\mathfrak{B}|\mathcal{L}_=\models\varphi'\left[c_0^{\mathfrak{B}},...,c_k^{\mathfrak{B}},b_0,...,b_m,b\right]。$$

由前面的证明已知，两个序列$c_0^{\mathfrak{A}},...,c_k^{\mathfrak{A}},a_0,...,a_m,a$与$c_0^{\mathfrak{B}},...,c_k^{\mathfrak{B}},b_0,...,b_m,b$对等同关系同构。因此由上面的引理，$\mathfrak{A}_Y\models\varphi[a]$当且仅当$\mathfrak{B}\models\varphi[b]$。所以由$\mathfrak{B}\models\Gamma[b]$可得$\mathfrak{A}\models\Gamma[a]$。**证毕**。

例 4.2.4 *有限模型总是可数饱和的。*

证明：设$\mathfrak{A}$有限，则$\mathfrak{A}_Y$有限，所以由$\mathfrak{B}\models Th(\mathfrak{A}_Y)$可得$\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}_Y$，因此$\mathfrak{B}\models\Gamma[b]$蕴涵有$a$使得$\mathfrak{A}\models\Gamma[a]$。**证毕**。

称一个公式集$\Gamma(x_1,...,x_n)$为一致的，假如有一个模型实现它，即有模型$\mathfrak{A}$，$a_1,...,a_n\in A$使得$\mathfrak{A}\models\Gamma[a_1,...,a_n]$。显然，$\Gamma(x_1,...,x_n)$是一致的，当且仅当对新常项$c_1,...,c_n$，语句集$\Gamma(c_1,...,c_n)$是一致的。称$\Gamma(x_1,...,x_n)$为极大一致的，假如它是一致的，且对任何$\varphi(x_1,...,x_n)$，$\Gamma(x_1,...,x_n)\cup\{\varphi(x_1,...,x_n)\}$不一致，此时又称$\Gamma(x_1,...,x_n)$为一个$n$变元的型。显然，$\Gamma(x_1,...,x_n)$是极大一致的，当且仅当有模型$\mathfrak{A}$，$a_1,...,a_n\in A$使得$\Gamma(x_1,...,x_n)=\{\varphi(x_1,...,x_n):\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]\}$，即$\Gamma(x_1,...,x_n)$是所有满足$a_1,...,a_n$的公式的集合。这样的$\Gamma(x_1,...,x_n)$称为$a_1,...,a_n$的型。

设$\Gamma(x_1,...,x_n)$是一个型，理论$T\subseteq\Gamma(x_1,...,x_n)$，则称$\Gamma(x_1,...,x_n)$为$T$的型。显然，$\Gamma(x_1,...,x_n)$是$T$的型，当且仅当$\Gamma(x_1,...,x_n)$是$T$的某个模型中的某些元素的型。一个模型$\mathfrak{A}$的型指理论$Th(\mathfrak{A})$的型，即某个与$\mathfrak{A}$初等等价的模型中的某些元素的型。

例 4.2.5 *设$\mathfrak{A}$是$Th(\mathfrak{N})$的非标准模型，则其中的无穷元a的型包含公式$\neg x\equiv 0,\neg x\equiv S0,...$。标准模型$\mathfrak{N}$中没有个体的型会包含所有这些公式。*

对公式集$\Sigma(x_1,...,x_n)$和公式$\varphi(x_1,...,x_n)$，假如对任何模型$\mathfrak{A}$及任意$a_1,...,a_n\in A$有$\mathfrak{A}\models\Sigma[a_1,...,a_n]$蕴涵$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$，则记$\Sigma(x_1,...,x_n)\models\varphi(x_1,...,x_n)$。注意，这与第一章定义的公式集与公式之间的逻辑蕴涵关系有所不同。显然，$\Sigma(x_1,...,x_n)\models\varphi(x_1,...,x_n)$当且仅当对任意新常项$c_1,...,c_n$，$\Sigma(c_1,...,c_n)\models\varphi(c_1,...,c_n)$。

推论 4.2.2 *设$c_1,...,c_n$是不属于$\mathcal{L}$的新常项，$\mathcal{L}'=\mathcal{L}\cup\{c_1,...,c_n\}$。如$\Sigma(x_1,...,x_n)$是$\mathcal{L}$的型，则$\Sigma(c_1,...,c_m,x_{m+1},...,x_n)$是$\mathcal{L}'$的型。反之，如$\Gamma(x_{m+1},...,x_n)$是$\mathcal{L}'$的模型，*

则

$$\Sigma(x_1,...,x_n)=\{\sigma(x_1,...,x_n):\sigma(c_1,...,c_m,x_{m+1},...,x_n)\in\Gamma(x_{m+1},...,x_n)\}$$

是$\mathcal{L}$的型。

证明：由假设有$\mathcal{L}$的模型$\mathfrak{A}$及$a_1,...,a_n\in A$使得$\Sigma(x_1,...,x_n)$是$a_1,...,a_n$的型。$\mathfrak{A}$可膨胀为$\mathcal{L}'$的模型$\mathfrak{A}'$使$c_1,...,c_m$被解释为$a_1,...,a_m$，则$\Sigma(c_1,...,c_m,x_{m+1},...,x_n)$成为$\mathfrak{A}'$中$a_{m+1},...,a_n$的型。反之，有$\mathcal{L}'$的模型$\mathfrak{A}'$及$a_{m+1},...,a_n\in A'$使得$\Gamma(x_{m+1},...,x_n)$是个体$a_{m+1},...,a_n$的型。令$a_1,...,a_m$为$c_1^{\mathfrak{A}'},...,c_m^{\mathfrak{A}'}$，$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'|\mathcal{L}$，则$\mathfrak{A}\models\sigma[a_1,...,a_n]$蕴涵$\mathfrak{A}'\models\sigma[c_1,...,c_m,a_{m+1},...,a_n]$，即$\sigma(c_1,...,c_m,x_{m+1},...,x_n)\in\Gamma(x_{m+1},...,x_n)$，反之亦然。所以$\Sigma(x_1,...,x_n)$是$\mathfrak{A}$中$a_1,...,a_n$的型。**证毕**。

命题 4.2.3 （*C&K2.3.6*）设$\mathfrak{A}$是ω-饱和的，$Y\subseteq A$有限，$\mathcal{L}_Y$公式集$\Gamma(x_1,...,x_n)$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致，则$\Gamma(x_1,...,x_n)$在$\mathfrak{A}$中实现。

证明：对n归纳。$n=1$时即定义。设对$n-1$成立。由$\Gamma(x_1,...,x_n)$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致，有$\mathfrak{B}\models Th(\mathfrak{A}_Y)$及$b_1,...,b_n\in B$使得$\mathfrak{B}\models\Gamma[b_1,...,b_n]$。不妨设$\Gamma(x_1,...,x_n)$在有限交下封闭。令

$$\Gamma'(x_1,...,x_{n-1})=\{\exists x_n\gamma(x_1,...,x_n):\gamma\in\Gamma\},$$

则$\mathfrak{B}\models\Gamma'[b_1,...,b_{n-1}]$，所以$\Gamma'(x_1,...,x_{n-1})$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致。因此由归纳假设可知，$\Gamma'(x_1,...,x_{n-1})$在$\mathfrak{A}_Y$中实现，即有$a_1,...,a_{n-1}\in A$使得$\mathfrak{A}_Y\models\Gamma'[a_1,...,a_{n-1}]$。令$Y'=Y\cup\{a_1,...,a_{n-1}\}$，$\Gamma''(x_n)=\Gamma\left(c_{a_1},...,c_{a_{n-1}},x_n\right)$，则$\Gamma''(x_n)$为$\mathcal{L}_{Y'}$公式集，而且对$\gamma\left(c_{a_1},...,c_{a_{n-1}},x_n\right)\in\Gamma''(x_n)$，$\mathfrak{A}_{Y'}\models\exists x_n\gamma\left(c_{a_1},...,c_{a_{n-1}},x_n\right)$。因为$\Gamma''(x_n)$在有限交下封闭，可知$\Gamma''(x_n)$与$Th(\mathfrak{A}_{Y'})$一致，所以由$\mathfrak{A}$是$\omega$-饱和的，$\Gamma''(x_n)$在$\mathfrak{A}_{Y'}$中实现，即有$a_n\in A$使得$\mathfrak{A}_{Y'}\models\Gamma\left[c_{a_1},...,c_{a_{n-1}},a_n\right]$。所以$\mathfrak{A}\models\Gamma[a_1,...,a_{n-1},a_n]$，即$\Gamma(x_1,...,x_n)$在$\mathfrak{A}$中实现。**证毕**。

定理 4.2.4 （*C&K2.3.7*）设T是$\mathcal{L}$的完备理论，则T有可数饱和模型，当且仅当对任何$n>0$，T只有可数个n变元的型。

证明：必要性：设$\mathfrak{A}$是T的可数饱和模型。对T的任一型$\Gamma(x_1,...,x_n)$，$\Gamma(x_1,...,x_n)$与T一致，所以由上面的命题，$\Gamma(x_1,...,x_n)$在$\mathfrak{A}$中实现，即有$a_1,...,a_n\in A$使得$\mathfrak{A}\models\Gamma[a_1,...,a_n]$，即$\Gamma(x_1,...,x_n)$是$a_1,...,a_n$的型。所以有$A^n$到$T$的所有$n$变元的型的满映射，所以$T$只有可数个$n$变元的型。

充分性：取新常项集$C=\{c_0,c_1,...\}$，令$\mathcal{L}'=\mathcal{L}\cup C$，令

$$\mathcal{S}=\left\{\Gamma(x):\text{对某个有限集}D\subseteq C\text{，}\Gamma(x)\text{是语言}\mathcal{L}\cup D\text{的单变元的型，且}T\subseteq\Gamma(x)\right\}\text{。}$$

先证明

（a）$\mathcal{S}$是可数的。

证明：设$D=\{d_1,...,d_n\}\subseteq C$，$\Gamma(x)$是语言$\mathcal{L}\cup D$的单变元的型，且$T\subseteq\Gamma(x)$，即$\Gamma(x)$是$T$在$\mathcal{L}\cup D$中的型。由上面的推论可知，

$$\Gamma'(x_1,...,x_n,x)=\{\gamma(x_1,...,x_n,x):\gamma(d_1,...,d_n,x)\in\Gamma(x)\}$$

是T在$\mathcal{L}$中的$n+1$变元的型。而且，如$\Gamma_1(x),\Gamma_2(x)$是T在$\mathcal{L}\cup D$中的不同的单变元的型，则相应的$\Gamma_1'(x_1,...,x_n,x),\Gamma_2'(x_1,...,x_n,x)$是$T$在$\mathcal{L}$中的不同的$n+1$变元的型。由假设，$T$只有可数个不同的$n+1$变元的型，所以$T$在$\mathcal{L}\cup D$中只有可数个不同的单变元的型。又因为只有可数个有限集$D\subseteq C$，所以$\mathcal{S}$是可数的。**证毕**。

回到定理证明。设$\Gamma_0(x),\Gamma_1(x),...$为所有$T$在某个$\mathcal{L}\cup D$中的单变元的型，设$\varphi_0,\varphi_1,...$为$\mathcal{L}'$的所有语句。定义$T_0=T,T_1,T_2,...$如下：设$T_m$已定义，一致，且只含$C$中有限个新常项，$T_{m+1}$定义如下：

（1）如$T_m\cup\{\varphi_m\}$一致，令$T_m'=T_m\cup\{\varphi_m\}$，否则令$T_m'=T_m$；

（2）如φ_m具有形式$\exists x\psi(x)$，且$\varphi_m\in T_m'$，则取一个不在$T_m,\exists x\psi(x)$中出现的新常项$d\in C$，令$T_m''=T_m'\cup\{\psi(d)\}$，否则令$T_m''=T_m'$；

（3）如$\Gamma_m(x)$与T_m''一致，则因$\Gamma_m(x)$中也只出现有限个C中新常项，可取不在$\Gamma_m(x),T_m''$中出现的新常项$e\in C$，令$T_{m+1}=T_m''\cup\Gamma_m(e)$。

由定义，显然T_{m+1}也一致且只含C中有限个新常项。令$T_\omega=\cup_m T_m$。显然T_ω完备且以C为证据集。所以T_ω有模型$\mathfrak{A}'$使得$A'=\left\{c^{\mathfrak{A}'}:c\in C\right\}$。令$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'|\mathcal{L}$。$\mathfrak{A}$可数，$\mathfrak{A}\models T$。只要证$\mathfrak{A}$是$\omega$-饱和的。为此设有限集$Y=\{a_1,...,a_n\}\subseteq A=A'$，且设$\mathcal{L}_Y$公式集$\Sigma(x)=\Sigma(c_{a_1},...,c_{a_n},x)$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致。所以有$\mathfrak{B}\models Th(\mathfrak{A}_Y)$及$b\in B$使得$\mathfrak{B}\models\Sigma[b]$。不妨设$\Sigma(x)$已经扩张成$b$在$\mathfrak{B}$中的型。$\Sigma(x)$也是$T$在$\mathcal{L}_Y$中的单变元的型，即$T\subseteq\Sigma(x)$，因为$T\subseteq Th(\mathfrak{A}_Y)$。设$D=\{d_1,...,d_n\}\subseteq C$使得$a_i=d_i^{\mathfrak{A}'},i=1,...,n$。将$\Sigma(x)=\Sigma(c_{a_1},...,c_{a_n},x)$中代表个体$a_i$的新常项$c_{a_i}$换成$d_i\in C$，$\Sigma(x)$成为语言$\mathcal{L}\cup D$中的单变元的型$\Sigma'(d_1,...,d_n,x)$。$\Sigma'(d_1,...,d_n,x)$也是$T$在$\mathcal{L}\cup D$中的单变元的型，所以对某个$m$，$\Sigma'(d_1,...,d_n,x)=\Gamma_m(x)$。可以证明$\Gamma_m(x)$与$T_\omega$一致。因为，设$\gamma(d_1,...,d_n,x)\in\Gamma_m(x)=\Sigma'(d_1,...,d_n,x)$，则$\gamma(c_{a_1},...,c_{a_n},x)\in\Sigma(x)$。由假设$\Sigma(x)$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致，所以$\exists x\gamma(c_{a_1},...,c_{a_n},x)$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致，所以$\mathfrak{A}_Y\models\exists x\gamma(c_{a_1},...,c_{a_n},x)$，因此$\mathfrak{A}\models\exists x\gamma[a_1,...,a_n,x]$，由此可得$\mathfrak{A}'\models\exists x\gamma(d_1,...,d_n,x)$。因为$T_\omega$完备且$\mathfrak{A}'\models T_\omega$，所以$\exists x\gamma(d_1,...,d_n,x)\in T_\omega$，$\gamma(d_1,...,d_n,x)$与$T_\omega$一致。$\Gamma_m(x)$作为型是在有限交下封闭的，所以$\Gamma_m(x)$与$T_\omega$一致。所以在上面定义的第（3）步，$\Gamma_m(x)$与$T_m''$一致，所以有$e\in C$使得$\Gamma_m(e)\subseteq T_\omega$，即$\mathfrak{A}'\models\Sigma'(d_1,...,d_n,e)$，所以$\mathfrak{A}\models\Sigma'\left[a_1,...,a_n,e^{\mathfrak{A}'}\right]$，由此又可得$\mathfrak{A}_Y\models\Sigma\left[c_{a_1},...,c_{a_n},e^{\mathfrak{A}'}\right]$，即$\mathfrak{A}_Y\models\Sigma\left[e^{\mathfrak{A}'}\right]$，即$\Sigma(x)$在$\mathfrak{A}_Y$中实现。所以$\mathfrak{A}$是$\omega$-饱和的。**证毕**。

推论 4.2.5（*C&K2.3.8*）设T是$\mathcal{L}$的完备理论，且T只有可数个不同构的可数模型，则T有可数饱和模型。

证明：对T的任一n变元的型$\Gamma(x_1,...,x_n)$，有T的可数模型$\mathfrak{A}$及$a_1,...,a_n\in A$使得Γ为$a_1,...,a_n$在$\mathfrak{A}$中的型，且Γ由$\mathfrak{A}$及$a_1,...,a_n$唯一确定。但T只有可数个不同构的可数模型$\mathfrak{A}$，每个可数模型$\mathfrak{A}$中又只有可数个n元组$a_1,...,a_n\in A$。所以T至多只有可数个不同的n变元的型。由上面的定理，T有可数饱和模型。**证毕**。

定理 4.2.6（*C&K2.3.9*）设$\mathcal{L}$的模型$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$可数饱和，$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$，则$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$。

证明: 设$A = \{u_0, u_1, ...\}$，$B = \{w_0, w_1, ...\}$。我们要将$u_0, u_1, ...$与$w_0, w_1, ...$重新排列成$a_0, a_1, ...$与$b_0, b_1, ...$，使得对任何$n \geq 0$，$(\mathfrak{A}, a_0, ..., a_n) \equiv (\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n)$。然后定义$f : A \to B$，$f(a_i) = b_i$对$i = 0, 1, ...$，则易见$f : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$。

对n递归定义a_n, b_n。已知$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$。设已有$a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n$使得$(\mathfrak{A}, a_0, ..., a_n) \equiv (\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n)$。取$u_0, u_1, ...$中第一个不在$a_0, ..., a_n$中出现的元素为$a_{n+1}$。设$\Gamma(x)$为$a_{n+1}$在模型$(\mathfrak{A}, a_0, ..., a_n)$中的型，则$\Gamma(x)$与$Th((\mathfrak{A}, a_0, ..., a_n))$一致。由假设$(\mathfrak{A}, a_0, ..., a_n) \equiv (\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n)$，所以$\Gamma(x)$与$Th((\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n))$一致。由$\mathfrak{B}$可数饱和，$\Gamma(x)$在$(\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n)$中实现，即有$b_{n+1} \in B$使得$(\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n) \models \Gamma[b_{n+1}]$。要证明$(\mathfrak{A}, a_0, ..., a_n, a_{n+1}) \equiv (\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n, b_{n+1})$。为此设$\varphi(x_0, ..., x_n, x_{n+1})$为$\mathcal{L}$的公式，且$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_n, a_{n+1}]$。则$\varphi(c_{a_0}, ..., c_{a_n}, x) \in \Gamma(x)$。所以由$(\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n) \models \Gamma[b_{n+1}]$可得$(\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n) \models \varphi[c_{a_0}, ..., c_{a_n}, b_{n+1}]$，即$\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, ..., a_n, a_{n+1}]$。所以$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_n, a_{n+1}]$蕴涵$\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, ..., a_n, a_{n+1}]$。考虑$\neg\varphi$可得反向蕴涵。所以，对$\mathcal{L}$的任何公式$\varphi(x_0, ..., x_n, x_{n+1})$，$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, ..., a_n, a_{n+1}]$当且仅当$\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, ..., a_n, a_{n+1}]$。所以$(\mathfrak{A}, a_0, ..., a_n, a_{n+1}) \equiv (\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n, b_{n+1})$。再取$w_0, w_1, ...$中第一个不在$b_0, ..., b_n, b_{n+1}$中出现的元素为$b_{n+2}$，同理可得$a_{n+2} \in A$使得$(\mathfrak{A}, a_0, ..., a_{n+2}) \equiv (\mathfrak{B}, b_0, ..., b_{n+2})$。这保证了$A$中所有元素都在$a_0, a_1, ...$中，$B$中所有元素都在$b_0, b_1, ...$中。**证毕**。

$\mathcal{L}$的模型$\mathfrak{A}$称为可数泛模型，假如$\mathfrak{A}$是可数的，而且任何与$\mathfrak{A}$初等等价的可数模型可以初等嵌入于$\mathfrak{A}$中。

定理 4.2.7 （*C&K2.3.10*）可数饱和模型是可数泛模型。

证明: 设$\mathfrak{B}$可数饱和，$\mathfrak{A}$是可数的，$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$。设$A = \{a_0, a_1, ...\}$。上面的证明中由$a_{n+1}$选择相应的$b_{n+1}$时只需假设$\mathfrak{B}$是$\omega$-饱和的。所以有$b_0, b_1, ... \in B$使得对任何$n \geq 0$，$(\mathfrak{A}, a_0, ..., a_n) \equiv (\mathfrak{B}, b_0, ..., b_n)$。显然，函数$f : A \to B$，$f(a_i) = b_i$对$i = 0, 1, ...$，使得$f : \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$。**证毕**。

例 4.2.6 （*C&K2.3.11*）设

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \{c_{ij} : i, j = 0, 1, ...\} \cup \{P_i : i = 0, 1, ...\}, \\
\mathcal{L}_n &= \{c_{ij} : i, j = 0, ..., n\} \cup \{P_i : i = 0, ..., n\} \\
T &= \{\neg\exists x (P_i(x) \wedge P_j(x)) : i, j = 0, 1, ..., i \neq j\} \cup \\
&\quad \{P_i(c_{ij}) : i = 0, 1, ...\} \cup \{\neg c_{ij} \equiv c_{ik} : i, j, k = 0, 1, ..., j \neq k\}.
\end{aligned}
$$

（*1*）如$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$是$T$的可数模型，则对任何$n \geq 0$，$\mathfrak{A}|\mathcal{L}_n \cong \mathfrak{B}|\mathcal{L}_n$。

证明: 首先，对$i, j \leq n$，将$c_{ij}^{\mathfrak{A}}$对应到$c_{ij}^{\mathfrak{B}}$。其次对$i \leq n$，$P_i^{\mathfrak{A}}$中有可数无穷个不同于$c_{i0}^{\mathfrak{A}}, ..., c_{in}^{\mathfrak{A}}$的元素，同样，$P_i^{\mathfrak{B}}$中有可数无穷个不同于$c_{i0}^{\mathfrak{B}}, ..., c_{in}^{\mathfrak{B}}$的元素，将它们任意地1-1对应起来。最后，$A$中有可数无穷个元素不属于$P_0^{\mathfrak{A}} \cup ... \cup P_n^{\mathfrak{A}}$，同样，$B$中有可数无穷个元素不属于$P_0^{\mathfrak{B}} \cup ... \cup P_n^{\mathfrak{B}}$，将它们任意地1-1对应起来。这样得到的对应即是$\mathfrak{A}|\mathcal{L}_n$与$\mathfrak{B}|\mathcal{L}_n$的同构。**证毕**。

（*2*）如$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$是$T$的可数模型，则$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，即$T$是完备的。

证明: 对$\mathcal{L}$的任何语句φ，有n使得φ是$\mathcal{L}_n$的语句。由（1）显然$\mathfrak{A} \models \varphi$当且仅当$\mathfrak{B} \models \varphi$。所以$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$。**证毕**。

（3）T有$2^{\aleph_0}$个互不同构的可数模型。

证明：对任一0-1无穷序列$l = (l_0, l_1, ...)$可构造可数模型$\mathfrak{A}$使得对$i \geq 0$，当$l_i = 0$时，$P_i^{\mathfrak{A}} = \{c_{i0}^{\mathfrak{A}}, c_{i1}^{\mathfrak{A}}, ...\}$，当$l_i = 1$时，$P_i^{\mathfrak{A}} = \{d_i, c_{i0}^{\mathfrak{A}}, c_{i1}^{\mathfrak{A}}, ...\}$，其中$d_i$不同于$c_{i0}^{\mathfrak{A}}, c_{i1}^{\mathfrak{A}}, ...$。显然，对不同的0-1无穷序列$l, l'$，相应的模型$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$不同构。所以有$2^{\aleph_0}$个互不同构的可数模型。**证毕**。

（4）设T的可数模型$\mathfrak{A}$使得对任何$i \geq 0$，$P_i^{\mathfrak{A}}$中有无穷多个不同于$c_{i0}^{\mathfrak{A}}, c_{i1}^{\mathfrak{A}}, ...$的元素，而且$A$中有无穷多个元素不属于$P_0^{\mathfrak{A}} \cup P_1^{\mathfrak{A}} \cup ...$，则$\mathfrak{A}$是可数饱和模型。

证明：设$Y = \{u_1, ..., u_n\}$，$\mathcal{L}_Y$的公式集$\Gamma(x)$与$Th(\mathfrak{A}_Y)$一致。所以有可数模型$\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A}_Y)$，以及$w_{n+1} \in B$使得$\mathfrak{B} \models \Gamma[w_{n+1}]$。令$w_k = c_{u_k}^{\mathfrak{B}}$，对$k = 1, ..., n$，则由$\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A}_Y)$可得$(\mathfrak{A}, u_1, ..., u_n) \equiv (\mathfrak{B}, w_1, ..., w_n)$。而且，对应于$w_{n+1} \in B$，由假设，一定有$u_{n+1} \in A$使得对任何$i, j \geq 0$，任何$k = 1, ..., n$，有$u_{n+1} = c_{ij}^{\mathfrak{A}}$当且仅当$w_{n+1} = c_{ij}^{\mathfrak{B}}$，且$P_i^{\mathfrak{A}}(u_{n+1})$当且仅当$P_i^{\mathfrak{B}}(w_{n+1})$，且$u_{n+1} = u_k$当且仅当$w_{n+1} = w_k$。可以证明，对$\mathcal{L}$的任何公式$\varphi(x_1, ..., x_{n+1})$，有$\mathfrak{A} \models \varphi[u_1, ..., u_{n+1}]$当且仅当$\mathfrak{B} \models \varphi[w_1, ..., w_{n+1}]$。因为，设$\varphi$是$\mathcal{L}_m$的公式，由$(\mathfrak{A}, u_1, ..., u_n) \equiv (\mathfrak{B}, w_1, ..., w_n)$以及这里关于$u_{n+1}$的选择的条件，可取（1）中的同构$\mathfrak{A}|\mathcal{L}_m \cong \mathfrak{B}|\mathcal{L}_m$使得$u_1, ..., u_{n+1}$分别被对应到$w_1, ..., w_{n+1}$。因此，由$\mathfrak{B} \models \Gamma[w_{n+1}]$可得$\mathfrak{A} \models \Gamma[u_{n+1}]$。所以$Th(\mathfrak{A}_Y)$在模型$\mathfrak{A}$中实现，即$\mathfrak{A}$是可数饱和模型。**证毕**。

例 4.2.7 （*C&K2.3.12*）设$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Ord} = \{\leq\}$为序关系的语言，定义

$$(x < y) =_{df} (x \leq y \wedge \neg x \equiv y),$$
$$pred(x, y) =_{df} x < y \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < y),$$

又设理论$T =$线性序公理$\cup \{\forall x \exists y \exists z (pred(y, x) \wedge pred(x, z))\}$。

（1）T的模型恰为这样得到的模型：取一线性序，将其中每个元素换成整数序$\langle Z, \leq \rangle$且保持顺序。

（2）T完备。

证明：用消除量词法。对$n \geq 0$，令

$$\gamma_n(x, y) =_{df} \exists x_0 ... \exists x_n (x \equiv x_0 \wedge pred(x_0, x_1) \wedge ... \wedge pred(x_{n-1}, x_n) \wedge x_n \equiv y),$$

即$\gamma_n(x, y)$表示从x经n个直接后继可达到y，或$y - x = n$。令

$$\sigma_n(x, y) =_{df} \exists x_0 ... \exists x_n (x \leq x_0 \wedge x_0 < x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} < x_n \wedge x_n \leq y),$$

即$y - x \geq n$。则在T中，$x \equiv y \leftrightarrow \gamma_0(x, y)$，$x \leq y \leftrightarrow \sigma_0(x, y)$，$x < y \leftrightarrow \sigma_1(x, y)$，$\top \leftrightarrow \gamma_0(v_0, v_0)$，$\bot \leftrightarrow \gamma_1(v_0, v_0)$，而且，

$$\neg \gamma_n(x, y) \leftrightarrow y < x \vee \gamma_0(x, y) \vee ... \vee \gamma_{n-1}(x, y) \vee \sigma_{n+1}(x, y),$$
$$\neg \sigma_n(x, y) \leftrightarrow y < x \vee \gamma_0(x, y) \vee ... \vee \gamma_{n-1}(x, y).$$

所以任何开公式等价于一些γ_n, σ_n的合取的析取，而且任何$\gamma_n, \sigma_n, n \geq 0$,的布尔组合等价于一些$\gamma_n, \sigma_n$的合取的析取。可以逐步证明如下结论：

（2.1）γ_n, σ_n等的合取又等价于$\top, \bot$，或如下规范合取式的析取：

$$\gamma_{i_1}(x_0, x_1) \wedge ... \wedge \gamma_{i_n}(x_{n-1}, x_n) \wedge \sigma_{p_1}(x_n, y_0) \wedge \gamma_{j_1}(y_0, y_1) \wedge ... \wedge \gamma_{j_m}(y_{m-1}, y_m) \wedge \sigma_{p_2}(y_m, z_0) \wedge \gamma_{k_1}(z_0, z_1) \wedge ...;$$

（2.2）如$\varphi(x_1, ..., x_n)$是规范合取式，则$\exists x_i \varphi$等价于$\top, \bot$，或一个规范合取式；

（2.3）每个公式$\varphi(v_0, ..., v_m)$等价于$\top, \bot$，或规范合取式的析取，且后者的自由变元都在$v_0, ..., v_m$中；

（2.4）每个语句等价于$\top$或$\bot$，即T完备。

证毕。

（*3*）*T有$2^{\aleph_0}$个互不同构的可数模型*。

证明：可以先证明有$2^{\aleph_0}$个互不同构的可数线性序模型。对任一0-1序列，如00110...，将其中的0换成整数线性序Z得到一个线性序，如$ZZ11Z...$。不难验证，对不同的0-1序列，这样得到的线性序不同构。所以有$2^{\aleph_0}$个互不同构的可数线性序模型。将一个可数线性序中的每个元素都换成Z后可得T的模型。不难验证，对两个不同构的线性序，这样得到的T的模型也不同构。所以有$2^{\aleph_0}$个互不同构的T的模型。**证毕**。

（*4*）*$\mathfrak{Z} = \langle Z, \leq \rangle$是$T$的原子模型*。

证明：设$a_0, ..., a_n \in Z$，且设它们为从小到大的排列。有唯一形如

$$\gamma_{k_1}(x_0, x_1) \wedge ... \wedge \gamma_{k_n}(x_{n-1}, x_n)$$

的公式$\varphi(x_0, ..., x_n)$被$a_0, ..., a_n$满足。要证$\varphi(x_0, ..., x_n)$在T中完备。为此设$\psi(x_0, ..., x_n)$是任一公式，要证$T \models \varphi \rightarrow \psi$或者$T \models \varphi \rightarrow \neg\psi$。因为$T$完备，只要证$\mathfrak{Z} \models \forall x_0 ... \forall x_n (\varphi \rightarrow \psi)$或者$\mathfrak{Z} \models \forall x_0 ... \forall x_n (\varphi \rightarrow \neg\psi)$。对任意$b_0, ..., b_n \in Z$，设$\mathfrak{Z} \models \varphi[b_0, ..., b_n]$。易证有$\mathfrak{Z}$的自同构将$a_0, ..., a_n$对应到$b_0, ..., b_n$，因此$\mathfrak{Z} \models \psi[a_0, ..., a_n]$当且仅当$\mathfrak{Z} \models \psi[b_0, ..., b_n]$。所以，当$\mathfrak{Z} \models \psi[a_0, ..., a_n]$时，$\mathfrak{Z} \models \forall x_0 ... \forall x_n (\varphi \rightarrow \psi)$，当$\mathfrak{Z} \models \neg\psi[a_0, ..., a_n]$时，$\mathfrak{Z} \models \forall x_0 ... \forall x_n (\varphi \rightarrow \neg\psi)$。**证毕**。

（*5*）*设$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$是$T$的可数模型，$Y = \{a_0, ..., a_n\} \subseteq A$使得$a_0 < a_1 < ... < a_n$，而且$Y = Y_1 \cup ... \cup Y_k$，其中$Y_i$中的元素属于同一$Z$的复本，不同的$Y_i, Y_j$则属于$Z$的不同复本，且对$i < j$，$Y_i$中的元素在$Y_j$中的元素前面，又设$X = \{b_0, ..., b_n\} \subseteq B$使得$b_0 < b_1 < ... < b_n$，而且有同样的分解$X = X_1 \cup ... \cup X_k$，而且$Y_i$与$X_i$中的元素数目相同且满足（4）中相同的完备公式，则对任何公式$\psi(x_0, ..., x_n)$，$\mathfrak{A} \models \psi[a_0, ..., a_n]$当且仅当$\mathfrak{B} \models \psi[b_0, ..., b_n]$*。

证明：由（2）的证明，$\psi(x_0, ..., x_n)$在T中等价于$\top$，$\bot$，或规范合取式的析取。这里的条件保证了，对$i = 0, ..., n-1$，a_i与a_{i+1}之间的距离等于b_i与b_{i+1}之

间的距离。所以，对于一个规范合取式$\psi(x_0,...,x_n)$，显然有$\mathfrak{A}\models\psi[a_0,...,a_n]$当且仅当$\mathfrak{B}\models\psi[b_0,...,b_n]$。所以对任何$\psi(x_0,...,x_n)$结论都成立。**证毕**。

（6）取有理数线性序，将其中每个元素换成Z，得T的模型$\mathfrak{B}$，则$\mathfrak{B}$是可数饱和模型。

证明：设有限集$Y\subseteq B$，设$Y=Y_1\cup...\cup Y_k$是如（5）中的分解。每个Y_i中的元素满足（4）中的一个完备公式φ_i。对$a\in Y_i$，$b\in Y_j$，$i<j$，对任何$n\geq 0$，a,b满足$\sigma_n(x,y)$。设$\mathcal{L}_Y$的公式集$\Gamma(x)$与理论$Th(\mathfrak{B}_Y)$一致，即有$\mathfrak{C}\models Th(\mathfrak{B}_Y)$以及$c\in C$使得$\mathfrak{C}\models\Gamma[c]$。由于$\mathfrak{C}\models Th(\mathfrak{B}_Y)$，$C$中与$Y$对应的元素同样可分成$X=X_1\cup...\cup X_k$。如果$c$属于某个$X_i$所属的$Z$的复本，$Y_i$所属的$Z$的复本中有处于相应位置的$b$。如$c$属于一个新的$Z$的复本，则由于有理数线性序是稠密无端点的，$B$一定包含相应的$Z$的复本，其中的任意$b$可与$c$处于相应的位置。这样相应的$b$也使得$\mathfrak{B}_Y\models\Gamma[b]$。所以$\Gamma(x)$在模型$\mathfrak{B}_Y$中实现。**证毕**。

（7）令模型$\mathfrak{B}$如（6），令模型$\mathfrak{C}$由模型$\mathfrak{B}$再在最后面加上Z的一个副本得到，则$\mathfrak{C}$是可数泛模型，但不是可数饱和模型。

证明：任给T的一个可数模型$\mathfrak{A}$。由（6）及定理4.2.7，$\mathfrak{A}$可初等地嵌入$\mathfrak{B}$中。由（5）易知，$\mathfrak{B}$是$\mathfrak{C}$的初等子模型。所以$\mathfrak{A}$可初等地嵌入$\mathfrak{C}$中。所以$\mathfrak{C}$是可数泛的。取模型$\mathfrak{C}$中Z的最后一个复本中的一个元素a，令$Y=\{a\}$，$\Gamma(x)=\{\sigma_n(c_a,x):n=0,1,...\}$。$\mathfrak{C}_Y\models\sigma_n[c_a,b]$意味着，$b$也属于模型$\mathfrak{C}$中$Z$的最后一个复本，而且$b-a\geq n$。显然，对任何固定的$n\geq 0$，有$b\in C$，使得$\mathfrak{C}_Y\models\sigma_i[c_a,b]$，对$i=0,...,n$。所以，$\Gamma(x)$的任何有限子集在$\mathfrak{C}_Y$中可实现，所以$\Gamma(x)$与$Th(\mathfrak{C}_Y)$一致。但不存在$b\in C$，使得$\mathfrak{C}_Y\models\sigma_i[c_a,b]$，对所有$i=0,1,...$。所以$\Gamma(x)$在$\mathfrak{C}_Y$中不可实现。所以$\mathfrak{C}_Y$不是$\omega$-饱和的。**证毕**。

定理 4.2.8 *（C&K2.3.13）设$\mathcal{L}$的理论T完备，则下列等价：*

（1）T是ω-范畴的；

（2）T有既是可数饱和又是原子的模型$\mathfrak{A}$；

（3）对$n<\omega$，T的每个型$\Gamma(x_1,...,x_n)$包含一个完备公式；

（4）对$n<\omega$，T至多只有有限个变元$x_1,...,x_n$的型；

（5）对$n<\omega$，T至多只有有限个互不等价的公式$\varphi(x_1,...,x_n)$；

（6）T的所有模型是原子的。

证明：（1）⇒（2）：设$\mathfrak{A}$是T在同构意义下唯一的可数无穷模型。T的任何可数模型同构于$\mathfrak{A}$，因此可初等嵌入于$\mathfrak{A}$，所以$\mathfrak{A}$是T的素模型。由定理4.1.5，$\mathfrak{A}$也是T的原子型。T只有可数个互不同构的可数模型，所以由推论4.2.5，T有可数饱和模型，它必须与$\mathfrak{A}$同构，所以$\mathfrak{A}$也是T的可数饱和模型。

（2）⇒（3）：设$\Gamma(x_1,...,x_n)$是T的型，则它与T一致，所以由命题4.2.3，取$Y=\varnothing$时，$\Gamma(x_1,...,x_n)$应该在T的可数饱和模型$\mathfrak{A}$中实现，即有$a_1,...,a_n\in A$使得$\mathfrak{A}\models\Gamma[a_1,...,a_n]$。因为$\mathfrak{A}$又是原子模型，有完备公式$\varphi(x_1,...,x_n)$使得$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$。因为$\Gamma$是型，应有$\varphi\in\Gamma$。所以$\Gamma$包含一个完备公式。

（3）⇒（4）：对在T中完备的公式$\varphi(x_1,...,x_n)$，令

$$\Gamma_\varphi=\{\psi(x_1,...,x_n):T\models\varphi\to\psi\}\text{。}$$

由φ在T中完备可知φ与T一致，所以Γ_φ也与T一致。由φ完备又可知，对任何$\psi(x_1,...,x_n)$，要么$\psi\in\Gamma_\varphi$，要么$\neg\psi\in\Gamma_\varphi$，所以$\Gamma_\varphi$是一个$T$的型。如$\varphi'(x_1,...,x_n)$也是完备公式，而且$\varphi'\in\Gamma_\varphi$，则$T\models\varphi\to\varphi'$。由$T\models\varphi'\to\neg\varphi$将得出$\varphi$与$T$不一致，所以只能有$T\models\varphi'\to\varphi$。所以$T\models\varphi'\leftrightarrow\varphi$，$\Gamma_\varphi=\Gamma_{\varphi'}$。由（3），$T$的每个型$\Gamma(x_1,...,x_n)$包含一个完备公式$\varphi(x_1,...,x_n)$。显然，$\Gamma=\Gamma_\varphi$。所以，$T$的任何变元$x_1,...,x_n$的型可表示成这里的形式$\Gamma_\varphi$。令

$$\Sigma(x_1,...,x_n)=\left\{\neg\varphi(x_1,...,x_n):\varphi(x_1,...,x_n)\text{ 为在}T\text{中完备的公式}\right\}\text{，}$$

则可以证明$\Sigma(x_1,...,x_n)$与T不一致。设不然，则$\Sigma(x_1,...,x_n)$可扩张成T的一个型$\Gamma(x_1,...,x_n)$。因此有完备公式$\varphi(x_1,...,x_n)\in\Gamma$。但是$\neg\varphi(x_1,...,x_n)\in\Sigma\subseteq\Gamma$，矛盾。所以$\Sigma$与$T$不一致。所以有有限个完备公式$\varphi_1,...,\varphi_m$使得$\{\neg\varphi_1,...,\neg\varphi_m\}$与理论$T$不一致，即$\exists x_1...\exists x_n(\neg\varphi_1\wedge...\wedge\neg\varphi_m)$与理论$T$不一致。因为$T$完备，所以$T\models\forall x_1...\forall x_n(\varphi_1\vee...\vee\varphi_m)$。现假设$\varphi$是任一在$T$中完备的公式，则必有一个$\varphi_i$使得$T\models\varphi_i\to\varphi$。因为，设不然，则对所有$i=1,...,m$，$T\models\varphi_i\to\neg\varphi$，由此可得$T\models\varphi_1\vee...\vee\varphi_m\to\neg\varphi$，因此$T\models\neg\varphi$，即$\varphi$与$T$不一致，矛盾。由$T\models\varphi_i\to\varphi$又可得$T\models\varphi\to\varphi_i$，所以$T\models\varphi\leftrightarrow\varphi_i$。所以$\Gamma_{\varphi_i}=\Gamma_\varphi$。所以$\Gamma_{\varphi_1},...,\Gamma_{\varphi_n}$即为$T$的所有变元$x_1,...,x_n$的型。

（4）⇒（5）：对任何公式$\varphi(x_1,...,x_n)$，令

$$\mathcal{T}_\varphi=\left\{\Gamma(x_1,...,x_n):\Gamma\text{是}T\text{的型且}\varphi\in\Gamma\right\}\text{。}$$

设$\mathcal{T}_\varphi=\mathcal{T}_{\varphi'}$，则对$T$的任一模型$\mathfrak{A}$，如$\mathfrak{A}\models\varphi[a_1,...,a_n]$，则$\varphi$属于$a_1,...,a_n$在模型$\mathfrak{A}$的型$\Gamma$，所以$\Gamma\in\mathcal{T}_\varphi$，所以$\Gamma\in\mathcal{T}_{\varphi'}$，所以$\varphi'\in\Gamma$，即$\varphi'$属于$a_1,...,a_n$在模型$\mathfrak{A}$的型，所以$\mathfrak{A}\models\varphi'[a_1,...,a_n]$。所以总有$\mathfrak{A}\models\varphi\leftrightarrow\varphi'$。因此$T\models\varphi\leftrightarrow\varphi'$。每个$\mathcal{T}_\varphi$是$T$的变元$x_1,...,x_n$的型的集合。设$T$有$m$个不同的变元$x_1,...,x_n$的型，则至多有$2^m$个不同的$\mathcal{T}_\varphi$，因此至多有$2^m$个互不等价的自由变元都在$x_1,...,x_n$中的公式。

（5）⇒（6）：设$\mathfrak{A}\models T$，$a_1,...,a_n\in A$。设$\varphi_1(x_1,...,x_n),...,\varphi_m(x_1,...,x_n)$为被$a_1,...,a_n$满足的所有有限个互不$T$等价的公式，令$\varphi=\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$。对任何$\psi(x_1,...,x_n)$，如$\mathfrak{A}\models\psi[a_1,...,a_n]$，则$\psi$等价于某个$\varphi_i$，所以$T\models\varphi\to\psi$；如$\mathfrak{A}\models\neg\psi[a_1,...,a_n]$，则$\neg\psi$等价于某个$\varphi_i$，所以$T\models\varphi\to\neg\psi$。所以$\varphi$是被$a_1,...,a_n$满足的完备公式。所以$\mathfrak{A}$完备。

（6）⇒（1）：设$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$是$T$的可数无穷模型。由于$T$完备，$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$。而由（6），$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$是原子模型。所以由定理4.1.3，$\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$。所以$T$是$\omega$-范畴的。**证毕**。

定理 4.2.9 设T是完备的理论且有可数饱和模型，则T有原子模型。

证明：设T没有原子模型。由定理4.1.2，T不是原子的。要证T没有可数饱和模型，由定理4.2.4，只要证对某个n，T有不可数个n变元的型。由T不是原子的，有与T一致但在T中不可完备的公式$\varphi(x_1,...,x_n)$。先证明一个结论

（1）如$\psi(x_1,...,x_n)$与T一致但在T中不可完备，则有$\psi_0(x_1,...,x_n),\psi_1(x_1,...,x_n)$，使得$\psi_0,\psi_1$都与$T$一致，而且在$T$中不可完备，而且$T\models\psi_0\to\psi$，$T\models\psi_1\to\psi$，$T\models\neg(\psi_0\wedge\psi_1)$。

证明：ψ与T一致但本身不是完备公式，所以有$\theta(x_1,...,x_n)$使得$T\nvDash\psi\to\theta$，而且$T\nvDash\psi\to\neg\theta$，所以$\psi\wedge\neg\theta$和$\psi\wedge\theta$都与$T$一致。可令$\psi_0=\psi\wedge\neg\theta$，$\psi_1=\psi\wedge\theta$，则$T\models\psi_0\to\psi$，$T\models\psi_1\to\psi$。由$\psi$在$T$中不可完备可知$\psi_0,\psi_1$也在$T$中不可完备。**证毕**。

回到定理的证明。对任一有限0-1序列h定义$\varphi_h(x_1,...,x_n)$如下：

（a）$\varphi_\varnothing=\varphi$。

（b）设φ_h已定义，而且φ_h与T一致且在T中不可完备。由如上结论（1），可取$\varphi_{h0},\varphi_{h1}$使得$T\models\varphi_{h0}\to\varphi_h$，$T\models\varphi_{h1}\to\varphi_h$，$\varphi_{h0},\varphi_{h1}$都与$T$一致且在$T$中不可完备，而且$T\models\neg(\varphi_{h0}\wedge\varphi_{h1})$。

显然，如h是h'的前段，则$T\models\varphi_{h'}\to\varphi_h$。对任一0-1无穷序列$h=\langle h_0,h_1,...\rangle$，令

$$\Gamma_h(x_1,...,x_n)=\left\{\varphi_\varnothing,\varphi_{\langle h_0\rangle},\varphi_{\langle h_0,h_1\rangle},...\right\}。$$

由上面的定义，序列$\varphi_\varnothing,\varphi_{\langle h_0\rangle},\varphi_{\langle h_0,h_1\rangle},...$中后面的公式在$T$中蕴涵前面的公式，而且其中每个公式都与$T$一致，所以$\Gamma_h$的任何有限子集与$T$一致，所以$\Gamma_h$与$T$一致。所以$\Gamma_h$可扩张为$T$的型$\Sigma_h(x_1,...,x_n)$。设$h_1,h_2$为两个不同的0-1无穷序列。不妨设有有限0-1序列h使得h同时是h_1,h_2的前段，而$h0$是是h_1的前段，$h1$是是h_2的前段。则由（1）及定义，Γ_{h_1}中有公式φ_{h0}，Γ_{h_2}中有公式φ_{h1}，而$T\models\neg(\varphi_{h0}\wedge\varphi_{h1})$。所以$\Gamma_{h_1}\cup\Gamma_{h_2}$不与$T$一致，所以$\Sigma_{h_1}\neq\Sigma_{h_2}$。由于有$2^{\aleph_0}$个不同的0-1无穷序列，所以有$2^{\aleph_0}$个不同$T$的型$\Sigma_h$。**证毕**。