一个自由模态的摹状词理论 $LFMDT_K$*

冯 艳　刘壮虎

1、L_K的理论背景

用自由逻辑来处理限定摹状词，已形成多种自由摹状词理论。这些理论以自由逻辑为基础，是自由逻辑在摹状词领域的重要应用。但是，对自然语言中如“当今的法国国王是当今的法国国王，这是必然的”、“唐僧的大徒弟会七十二变是必然的”这样的既包含“空限定摹状词”，又包含“必然”的语句，却很难用这些理论来刻画。本文提出一个自由模态的摹状词理论 **$LFMDT_K$**（文中简记为“**L_K**”），来处理和刻画限定摹状词在模态语境中出现的情形。在 **L_K** 中，引入了模态算子“□”。

L_K 能够反映出限定摹状词与个体常量、个体变元的根本区别。个体常量和个体变元是严格指示词，即对任意可能世界 w∈W，个体常量或个体变元在 w 中的指称与它们在任意 w 所通达的可能世界中的指称相同。而摹状词是非严格指示词，在不同的可能世界中可能会有不同的指称。比如，“世界上最高的山峰”，在现实世界中指“珠穆朗玛峰”，而在可能世界 w_1 中，可能珠穆朗玛峰存在但不是最高的山峰，而有另外一座叫做“无名峰”的山峰是最高的，这时“世界上最高的山峰”在 w_1 中就指“无名峰”，而不指“珠穆朗玛峰”。在 w_1 中，也可能珠穆朗玛峰根本就不存在，在这种情况下，显然“世界上最高的山峰”也不会指“珠穆朗玛峰”。

2、L_K的形式语言及其系统

2.1　L_K的形式语言

L_K 的初始符号是通常的带等词的模态谓词逻辑初始符号的扩充，加上表示“存在”的逻辑谓词 E!和摹状算子ι 。谓词用 P，Q，R 等表示，变元用 x，y，z 等表示，常量用 a，b，c 等表示。

L_K 的项和公式形成规则　项用 t, s 等表示，公式用 A, B 等表示，项和公式必要时都可以加下标。

(1) 变元和常量是项；

(2) 如果 t 是项，则 E!t 是公式；

(3) 如果 t，s 是项，则 $t \equiv s$ 是公式；

(4) 如果 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是项，P 是 n 元谓词，则 $Pt_1\ldots t_n$ 是公式；（P 可以是≡或 E!）

(5) 如果 A 是公式，则$\neg A$ 是公式；

(6) 如果 A, B 是公式，则$(A\rightarrow B)$是公式；

(7) 如果 A 是公式，则$\Box A$ 是公式；

(8) 如果 A 是公式，x 是变元，则$\forall xA$ 是公式；

(9) 如果 A 是公式且其中不含□，x 是变元，则ιxA 是项。

* 本文得到教育部文科基地重大研究项目《20 世纪西方逻辑哲学和数学哲学》（项目编号：05JJD720190）的资助。

和通常的谓词逻辑不同，在 $\mathbf{L_K}$ 中项和公式是互相定义的，但这是严格的归纳定义，不是循环定义，也不会出现自指。

(9)中的项ιxA称为摹状词，这是一种摹状词的形式理论中特有的项，也是我们特别要讨论的项。

变元的自由、约束、合适代入定义、括号省略规则同经典谓词逻辑，只增加：设 A 是不含“□”的任意 $\mathbf{L_K}$ 公式，ιxA 是项，则称 A 为ιx 的辖域，x 跟在 ι后出现或在ιx 的辖域中出现也称为约束出现。我们写代入 $A(x/t)$时，总是假设 $A(x/t)$是合适代入。∧，∨，⇔，∃，◇等符号通过定义引入，定义如常。

2.2　自由模态的摹状词理论 $\mathbf{L_K}$

公理（模式）

(A1)　$A\rightarrow(B\rightarrow A)$

(A2)　$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

(A3)　$(\neg A\rightarrow B)\rightarrow((\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow A)$

(A4)　$\forall x(A\rightarrow B)\rightarrow(\forall xA\rightarrow\forall xB)$

(A5)　$A\rightarrow\forall xA$　（x 不是 A 中的自由变元）

(A6)　$t\equiv t$

(A7)　$s_1\equiv t_1\wedge\ldots\wedge s_n\equiv t_n\rightarrow(Ps_1\ldots s_n\rightarrow Pt_1\ldots t_n)$　（P 可以是≡或 E!）

(A8)　$\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$

(A9)　$\neg(s\equiv t)\rightarrow\Box\neg(s\equiv t)$（$s, t$ 是常量或变元）

(A10)　$s\equiv t\rightarrow\Box(s\equiv t)$　（s, t 是常量或变元）

(A11)　$\forall xA\rightarrow(\mathrm{E!}t\rightarrow A(x/t))$　（A 中不含“□”）

(A12)　$\forall xA\rightarrow(\mathrm{E!}t\rightarrow A(x/t))$　（t 是常量或变元）

(A13)　$\mathrm{E!}c\wedge A(x/c)\wedge\forall x(A\rightarrow x\equiv c)\rightarrow\iota xA\equiv c$

(A14)　$\mathrm{E!}(\iota xA)\rightarrow A(\iota xA)\wedge\forall x(A\rightarrow x\equiv\iota xA)$

(A1)–**(A7)**是通常的谓词逻辑公理。P 是≡时，**(A7)**就是 $s_1\equiv t_1\wedge s_2\equiv t_2\rightarrow(s_1\equiv s_2\rightarrow t_1\equiv t_2)$；$P$ 是 E!时，**(A7)**就是 $s\equiv t\rightarrow(\mathrm{E!}s\rightarrow\mathrm{E!}t)$。**(A8)**–**(A10)**是模态公理。**(A9)**和**(A10)**表明，在我们的理论中常量和变元是一种强的严格指示词。对于严格指示词，一般只要求相等的就必然相等，而我们的理论还要求不相等的就必然不相等。**(A11)**和**(A12)**是对示例公理的限制。对于严格指示词（常量和变元），这种限制和通常的自由逻辑类似，但对于摹状词有更强的限制，这种更强的限制保证了摹状词是非严格指示词。**(A13)**和**(A14)**是刻画摹状词的公理，说明了摹状词ιxA 的直观意义就是那个唯一的满足性质 A 的对象。

推演规则

(R1)　如果 $\vdash A\rightarrow B$ 且 $\vdash A$，则 $\vdash B$。

(R2)　如果 $\vdash\mathrm{E!}x\rightarrow A$，则 $\vdash\forall xA$。

(R3)　如果 $\vdash A$，则 $\vdash\Box A$。

(R2)是自由逻辑对概括规则的一种修正，说明了全称的意义是相对于存在的对象，而不是相对于全部（存在或不存在的）对象。

几个导出规则和内定理

(DR1)　如果 $\vdash A\rightarrow B$，则 $\vdash\Box A\rightarrow\Box B$。

(DR2)　如果 $\vdash A\Leftrightarrow B$，则 $\vdash\Box A\Leftrightarrow\Box B$。

Th1：$\vdash\forall xA\rightarrow\forall yA(x/y)$，$y$ 在$\forall xA$ 中不自由。

Th2：$\vdash\forall x\mathrm{E!}x$。

Th3：$\vdash\Box(A\wedge B)\Leftrightarrow\Box A\wedge\Box B$。

Th4：$\vdash s\equiv t\rightarrow t\equiv s$。

Th5：$\vdash s\equiv t\wedge t\equiv u\rightarrow s\equiv u$。

Th6：$\vdash\mathrm{E!}t\rightarrow\exists x(x\equiv t)$

$\mathbf{L_K}$ 的语言（以后记为 $\mathcal{L}_\mathrm{K}$）可以作添加新常量的扩充。以后我们说的语言 $\mathcal{L}$ 都是指 $\mathcal{L}_\mathrm{K}$ 或 $\mathcal{L}_\mathrm{K}$ 添加新常量的扩充。语言扩充后，公理和推演规则的形式仍然不变，因为我们用的公理模式。为表明是语言 $\mathcal{L}$ 下的内定理，在 $\vdash$ 上加下标 $\mathcal{L}$，记为 $\vdash_{\mathcal{L}}$。

3、形式语义与 $\mathbf{L_K}$ 的可靠性

定义 3.1　（框架）　$\mathfrak{F}$ = <W, R, D, Q>是四元组。称 $\mathfrak{F}$ 是一个框架，如果 $\mathfrak{F}$ 满足如下条件：

(1) W 是非空集合。W 中的元素称为**可能世界**。

(2) R 是 W 上的二元关系，即 $R \subseteq W\times W$。

(3) D 是非空集合。D 中的元素称为**对象**。

(4) Q 是 W 到 D 的幂集$\mathscr{P}$(D)的函数，即对任意 $w\in W$，都有 $Q(w) \subseteq D$。Q(w)中的元素称为可能世界 w 上**存在的对象**。

$\mathscr{L}$ 是语言，$\mathscr{L}$ 的非逻辑谓词符号、项和公式称为 **$\mathscr{L}$ 表达式**，全体 $\mathscr{L}$ 表达式的集合记为 **Exp($\mathscr{L}$)**。

定义 3.2（**$\mathscr{L}$ 拟赋值**） $\mathfrak{F}$ = <W, R, D, Q>是框架，$\mathscr{L}$ 是语言，V 是 **Exp($\mathscr{L}$)**×W 上的偏函数（**Exp($\mathscr{L}$)**×W 中的某些元素可以无定义）。称 V 是 $\mathfrak{F}$ 上的一个 $\mathscr{L}$ 拟赋值，如果 V 满足如下条件：对任意 $w\in W$，

(1) 对任意非逻辑谓词 P，$V(P, w)$都有定义。

(2) 对任意项 t，任意的 $w'\in W$，如果 $V(t, w)$有定义且 wRw'，则 $V(t, w')$也有定义。

(3) 对任意谓词 P(可以是≡和 E!)，$V(Pt_1\ldots t_n, w)$有定义，当且仅当，$V(t_1, w), \ldots, V(t_n, w)$都有定义。

(4) 对任意公式 A，$V(\neg A, w)$有定义，当且仅当，$V(A, w)$有定义。

(5) 对任意公式 A，$V(A\rightarrow B, w)$有定义，当且仅当，$V(A, w)$和 $V(B, w)$都有定义。

(6) 对任意公式 A，$V(\forall xA, w)$有定义，当且仅当，对任意 $d\in Q(w)$，$V_{(x/d)}(A, w)$都有定义。

(7) 对任意公式 A，$V(\Box A, w)$有定义，当且仅当，对任意 $w'\in W$，若 wRw'，则 $V(A, w')$都有定义。

(8) 对任意非逻辑谓词 P，$V(P, w) \subseteq D^n$。

(9) 对任意项 t，如果 $V(t, w)$有定义，则 $V(t, w)\in D$。

(10) 对任意公式 A，如果 $V(A, w)$有定义，则 $V(A, w)\in\{0, 1\}$。

(11) 对任意常量或变元 t，任意 $w'\in W$，如果 $V(A, w)$有定义且 wRw'，则 $V(t, w) = V(t, w')$。

(12) $V(Pt_1\ldots t_n , w) = 1$，当且仅当，$<V(t_1,w),\ldots,V(t_n,w)>\in V(P, w)$。

(13) $V(t \equiv s , w) = 1$，当且仅当，$V(t , w) = V(s , w)$。

(14) $V(E!t, w) = 1$，当且仅当，$V(t, w)\in Q(w)$。

(15) $V(\neg A, w) = 1$，当且仅当，$V(A, w) = 0$。

(16) $V(A\rightarrow B, w) = 1$，当且仅当，$V(A, w) = 0$ 或 $V(B, w) = 1$。

(17) $V(\forall xA, w) = 1$，当且仅当，对任意的 $d\in Q(w)$，$V_{(x/d)}(A,w) = 1$。

(18) $V(\Box A, w) = 1$，当且仅当，对任意 $w'\in W$，如果 wRw'，则 $V(A, w') = 1$。

当 $V(P, w), V(t, w), V(A, w)$有定义时，$V(P, w), V(t, w), V(A, w)$分别称为 P, t, A 在 w 中的解释，当 $V(P, w), V(t, w), V(A, w)$无定义时，分别称 P, t, A 在 w 中无解释。

$\mathscr{L}'$是 $\mathscr{L}$ 的扩充，V′是 $\mathscr{L}'$拟赋值，去掉不是 $\mathscr{L}$ 的常量的解释，就得到了一个 $\mathscr{L}$ 拟赋值 V，V 称为 V′在 $\mathscr{L}$ 上的**限制**。$\mathscr{L}$ 的全体非逻辑谓词符号和项的集合记为 **$\mathbf{Exp_0}$($\mathscr{L}$)**。

引理 3.3 $\mathfrak{F}$ = <W, R, D, Q>是框架，如果 V 是 **$\mathbf{Exp_0}$($\mathscr{L}$)**×W 上的偏函数，且满足如下条件：
对任意 $w\in W$，(1) 对任意非逻辑谓词 P，$V(P, w)$都有定义。

(2) 对任意项 t，任意 $w, w'\in W$，如果 $V(t, w)$有定义且 wRw'，则 $V(t, w')$也有定义。

(3) 对任意非逻辑谓词 P，$V(P, w) \subseteq D^n$。

(4) 对任意项 t，如果 $V(t, w)$有定义，则 $V(t, w)\in D$。

(5) 对任意常量或变元 t，任意 $w'\in W$，如果 $V(t, w)$有定义且 wRw'，则 $V(t, w) = V(t, w')$。

则 V 可以扩充为唯一的一个 $\mathscr{L}$ 拟赋值 V′。

证明：对任意的非逻辑谓词 P，令 $V'(P, w) = V(P, w)$。对任意的项 t，令 $V'(t, w) = V(t, w)$。对任意的公式 A，归纳定义 $V'(A, w)$，使得 $V'(A, w)$满足 $\mathscr{L}$ 拟赋值关于公式的条件，详细归纳定义略。易证这样的 $\mathscr{L}$ 拟赋值是唯一的。■

因为满足题设条件的 V 扩充得到的 $\mathscr{L}$ 拟赋值 V′是唯一的，所以把 V′也记为 V。

当 $V(t, w)$ 和 $V'(t, w)$（或 $V(P, w)$和 $V'(P, w)$，或 $V(A, w)$和 $V'(A, w)$）都无定义时，则也记为 $V(t, w) = V'(t, w)$（或 $V(P, w) = V'(P, w)$，$V(A, w) = V'(A, w)$）。

引理 3.4 （合同引理） 设 $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ 是两个语言，$\mathfrak{F} = <W, R, D, Q>$是框架，V 和 V′分别是 $\mathfrak{F}$ 上 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 拟赋值。如果 A 同时是 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 中的公式，且对任意 $w\in W$，对 A 中任意项 t 和 A 中任意非逻辑谓词 P，都有 $V(t, w) = V'(t, w)$，$V(P, w) = V'(P, w)$，则 $V(A, w) = V'(A, w)$。

引理 3.5 （代入引理 1） 设 $\mathfrak{F} = <W, R, D, Q>$是框架，V 是 $\mathfrak{F}$ 上的 $\mathscr{L}$ 拟赋值，A 是不含□的公式，x 是变元，t 是项。对任意 $w\in W$，如果 $A(x/t)$代入合适，则有 $V(A(x/t), w) = V_{(x/V(t, w))}(A, w)$。

引理 3.6 （代入引理 2） 设 $\mathfrak{F} = <W, R, D, Q>$是框架，V 是 $\mathfrak{F}$ 上的 $\mathscr{L}$ 拟赋值，A 是公式，x 是变元，t 是常量或变元。对任意 $w\in W$，如果 $A(x/t)$代入合适，则有 $V(A(x/t), w) = V_{(x/V(t,w))}(A, w)$。

对于引理 3.4–引理 3.6，施归纳于公式 A 的结构，证明略。■

引理 3.7 （易字引理） 设 $\mathfrak{F} = <W, R, D, Q>$是框架，V 是 $\mathfrak{F}$ 上 $\mathscr{L}$ 拟赋值，$\forall xA$ 是公式，y 不是公式$\forall xA$ 中的自由变元，且 y 对 x 在 A 中代入自由，则对任意 $w\in W$，有 $V(\forall xA, w) = V(\forall yA(x/y), w)$。

证明：类似于谓词逻辑，证明略。■

定义 3.8 （$\mathscr{L}$ 赋值） 设 $\mathfrak{F}= <W, R, D, Q>$是框架，V 是 $\mathfrak{F}$ 上的 $\mathscr{L}$ 拟赋值。称 V 是 $\mathfrak{F}$ 上的一个 $\mathscr{L}$ 赋值，如果 V 满足如下条件，对任意 $w\in W$：

(19) 对任意的项 t，$V(t, w)$都有定义。（因此，对任何公式 A，$V(A, w)$都有定义）。

(20) 对于摹状词ιxA，如果 d 是 Q(w)中唯一使得 $V_{(x/d)}(A, w) = 1$ 的元素，则 $V(\iota xA, w) = d$；否则，$V(\iota xA, w)\notin Q(w)$。

$\mathscr{L}$ 赋值也是 $\mathscr{L}$ 拟赋值。所以对 $\mathscr{L}$ 拟赋值成立的引理 3.4、3.5、3.6 和 3.7 对 $\mathscr{L}$ 赋值都成立。

定义 3.9 （$\mathscr{L}$ 模型） $\mathfrak{M} = <\mathfrak{F}, V>$是二元组。称 $\mathfrak{M}$ 是一个 $\mathscr{L}$ 模型，当且仅当，$\mathfrak{F}$ 是一个框架且 V 是 $\mathfrak{F}$ 上的 $\mathscr{L}$ 赋值。

定义 3.10 （满足） $\mathfrak{F} = <W, R, D, Q >$是框架，$\mathfrak{M} = <\mathfrak{F}, V>$是 $\mathscr{L}$ 模型，A 是公式。

(1) $w\in W$。若 $V(A, w) = 1$，则称 A 在 w 上可满足，记为 $\mathfrak{M}\models_w A$。

(2) 若对任意 $w\in W$，都有 $\mathfrak{M}\models_w A$，则称 A 在 $\mathfrak{M}$ 上可满足，记为 $\mathfrak{M}\models A$。

定义 3.11 （有效） A 是公式。

(1) $\mathfrak{F}$ 是框架。如果对 $\mathfrak{F}$ 上的任意 $\mathscr{L}$ 赋值 V，都有$<\mathfrak{F}, V>\models A$，则称 A 是 $\mathfrak{F}$ 有效的。

(2) 如果对任意框架 $\mathfrak{F}$，A 都是 $\mathfrak{F}$ 有效的，则称 A 是有效的，记为 $\models A$。

引理 3.12 (1) 所有 $\mathbf{L_K}$ 公理都是 $\mathscr{L}_K$ 有效的；(2) $\mathbf{L_K}$ 推演规则保持 $\mathscr{L}_K$ 有效性。

证明：(1) 、(2)的证明都类似于模态谓词逻辑，证明略。■

定理 3.13 （可靠性定理） 所有 $\mathbf{L_K}$ 定理都是 $\mathscr{L}_K$ 有效的，即对任意 $\mathbf{L_K}$ 公式 A，若$\vdash A$，则$\models A$。

证明：由引理 3.12 可得。■

4、一致集和 Henkin 集

定义 4.1（推演） $\mathscr{L}$ 是语言，Γ是 $\mathscr{L}$ 公式集，A 是 $\mathscr{L}$ 公式。称Γ在 $\mathscr{L}$ 中推演出 A，如果存在 $A_1, A_2, \ldots, A_n\in\Gamma$ (n = 0, 1, …)，使得 $\vdash_{\mathscr{L}} A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\rightarrow A$。

将Γ在 $\mathscr{L}$ 中推演出 A 记为$\Gamma\vdash_{\mathscr{L}} A$。对于定义 4.1，演绎定理“$\Gamma\cup\{A\}\vdash_{\mathscr{L}} B$ 当且仅当$\Gamma\vdash_{\mathscr{L}} A\rightarrow B$”成立。

定义 4.2 （不一致） $\mathscr{L}$ 是语言，称 $\mathscr{L}$ 公式集Γ为 $\mathscr{L}$ 不一致的，如果存在 $\mathscr{L}$ 公式 A，使得$\Gamma\vdash_{\mathscr{L}} A$ 且 $\Gamma\vdash_{\mathscr{L}} \neg A$。

如果 $\mathscr{L}$ 公式集Γ不是 $\mathscr{L}$ 不一致的，则称Γ为 $\mathscr{L}$ 一致的。

定义 4.3 **（极大一致集）** Γ是 $\mathscr{L}$ 公式集。称Γ是 $\mathscr{L}$ 极大一致集，如果Γ是 $\mathscr{L}$ 一致的，并且对任意 $\mathscr{L}$ 公式 A，从 $\Gamma\cup\{A\}$ 是 $\mathscr{L}$ 一致的可得到 $A\in\Gamma$。

引理 4.4 **（一致集性质）**

(1) 对任意 $\mathscr{L}$ 公式集Γ，对任意 $\mathscr{L}$ 公式 A，$\Gamma\vdash_{\mathscr{L}} A$，当且仅当，$\Gamma\cup\{\neg A\}$ 不是 $\mathscr{L}$ 一致的。

(2) Γ是任意 $\mathscr{L}$ 公式集，A 是任意 $\mathscr{L}$ 公式，$\Gamma\cup\{A\}$ 不是 $\mathscr{L}$ 一致的，当且仅当，$\Gamma\vdash_{\mathscr{L}}\neg A$。

(3) 对任一语言 $\mathscr{L}$，Γ是任意 $\mathscr{L}$ 公式集，Γ不是 $\mathscr{L}$ 一致的，当且仅当，存在Γ的一个有限子集 Φ，使得 Φ 不是 $\mathscr{L}$ 一致的。

引理 4.5 设 $\mathscr{L}$ 公式集Γ是极大一致的，A、B 是任意 $\mathscr{L}$ 公式，则：

(1) $\Gamma\vdash_{\mathscr{L}} A$，当且仅当，$A\in\Gamma$； (2) $A\in\Gamma$，当且仅当，$\neg A\notin\Gamma$；

(3) $A\rightarrow B\in\Gamma$，当且仅当，$A\notin\Gamma$ 或 $B\in\Gamma$； (4) 如果 $A\in\Gamma$，$A\rightarrow B\in\Gamma$，则 $B\in\Gamma$。

引理 4.6（**Lindenbaum 定理**） 设Δ是任一 $\mathscr{L}$ 公式集，如果Δ是 $\mathscr{L}$ 一致的，则存在 $\mathscr{L}$ 极大一致集 Γ，使得 $\Delta\subseteq\Gamma$。

引理 4.7 设 $\mathscr{L}'$ 是由 $\mathscr{L}$ 加上一些新常量后得到的扩充语言，Γ是 $\mathscr{L}$ 的公式集，则Γ是 $\mathscr{L}$ 一致的，当且仅当，Γ是 $\mathscr{L}'$ 一致的。

引理 4.8 设 $\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2,\ldots$ 是可数无穷多个语言，使得 $\mathscr{L}_0\subseteq\mathscr{L}_1\subseteq\ldots\subseteq\mathscr{L}_n\subseteq\mathscr{L}_{n+1}\subseteq\ldots$。又设 $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ 分别是 $\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots$ 的公式集，使得 $\Phi_0\subseteq\Phi_1\subseteq\ldots\subseteq\Phi_n\subseteq\Phi_{n+1}\subseteq\ldots$。则 $\cup\Phi_n(n\in\omega)$ 是 $\cup\mathscr{L}_n(n\in\omega)$ 一致的。

引理 4.4–引理 4.8 的证明类似于谓词逻辑。（详细证明可参考叶峰，第 132—136 页） ■

定义 4.9 **（Henkin 集）** $\mathscr{L}$ 公式集 Φ 称为 Henkin 集，如果对 $\mathscr{L}$ 的每个形如 $\forall xA$ 的公式，有一个相应的常量符号 c，使得 $(E!c\rightarrow A(x/c))\rightarrow\forall xA\in\Phi$。

引理 4.10 设 $\mathscr{L}$ 是任一语言，Δ是 $\mathscr{L}$ 公式集，A 是 $\mathscr{L}$ 公式，如果Δ是 $\mathscr{L}$ 一致的，并且有常量 c 不在Δ和 A 中自由出现，则 $\Delta\cup\{(E!c\rightarrow A(x/c))\rightarrow\forall xA\}$ 是 $\mathscr{L}$ 一致的。

证明：据引理 4.4、推演规则(**R2**)，$\mathbf{L_K}$ 内定理可证。证明类似于谓词逻辑，详细证明略。■

定义 4.11 对任一语言 $\mathscr{L}_n$，$n = 0, 1, 2, \ldots$，用 C_n 表示集合：$C_n = \{c^{Ln}_{\forall xA} \mid \forall xA\in Form(\mathscr{L}_n)\}$，其中对每个形如 $\forall xA$ 的 $\mathscr{L}_n$ 公式，$c^{Ln}_{\forall xA}$ 是一个以 $\forall xA$ 为下标，以该语言为上标的不属于 $\mathscr{L}_n$ 的常量符号。我们约定，对任意语言 $\mathscr{L}_p, \mathscr{L}_q$，以及 $\mathscr{L}_p$ 公式 $\forall xA$、$\mathscr{L}_q$ 公式 $\forall yB$，$c^{Lp}_{\forall xA} = c^{Lq}_{\forall yB}$ 当且仅当 $\mathscr{L}_p = \mathscr{L}_q$ 且 $\forall xA = \forall yB$。用 $F^{*}_{\mathscr{L}n}$ 表示 $\mathscr{L}_n$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）的如下公式集：

$$F^{*}_{\mathscr{L}n} = \{(E!(c^{Ln}_{\forall xA})\rightarrow A(x/c^{Ln}_{\forall xA}))\rightarrow\forall xA \mid \forall xA\in Form(\mathscr{L}_n)\}。$$

由定义 4.11 可见，C_n 中的元素对于 $\mathscr{L}_n$ 来说，都是不属于该语言的新常量。对于每个形如 $\forall xA$ 的 $\mathscr{L}_n$ 公式，$F^{*}_{\mathscr{L}n}$ 中包含了一个形如 $(E!(c)\rightarrow A(x/c))\rightarrow\forall xA$ 的公式。

引理 4.12 设 $\mathscr{L}$ 是语言，Δ是任一 $\mathscr{L}$ 一致的公式集，则存在语言 $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\cup C$（C 是可数无穷多个不在 $\mathscr{L}$ 中出现的常量的集合），存在 $\mathscr{L}'$ 极大一致的 Henkin 集Σ，使得 $\Delta\subseteq\Sigma$。

证明：令 $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}$，$\mathscr{L}_{n+1} = \mathscr{L}_n\cup C_n$，$\mathscr{L}' = \cup\mathscr{L}_n(n\in\omega)$。令 $C = \cup C_n(n\in\omega)$，则有 $\mathscr{L}' = \cup\mathscr{L}_n(n\in\omega) = \mathscr{L}\cup C$。令 $\Delta_0 = \Delta$，$\Delta_{n+1} = \Delta_n\cup F^{*}_{\mathscr{L}n}$，$\Delta' = \cup\Delta_n(n\in\omega)$。分别证明（1）$\Delta'$ 是 $\mathscr{L}'$ 一致的；（2）Δ' 是 $\mathscr{L}'$ Henkin 集；（3）存在一个 $\mathscr{L}'$ 极大一致的 Henkin 集Σ，使得 $\Delta\subseteq\Sigma$。证明中用到定义 9、定义 4.11、引理 4.6、引理 4.7、引理 4.8 和引理 4.10。（详细证明可参考冯艳，第 89—91 页） ■

定义 4.13 Γ是任一 $\mathscr{L}$ 公式集，记 $\Box^{-}(\Gamma) = \{A: \Box A\in\Gamma\}$。

引理 4.14 设 $\mathscr{L}$ 是任一语言，w 是任一 $\mathscr{L}$ 一致集，B 是任一 $\mathscr{L}$ 公式，如果 $\neg\Box B\in w$，则 $\Box^{-}(w)\cup\{\neg B\}$ 也是 $\mathscr{L}$ 一致的。

证明：根据引理 4.4、定义 4.1、定义 4.13、内定理 **Th3**、定义 4.2 等可证，详细证明略。■

引理 4.15　$\mathcal{L}$ 是语言，w 是 $\mathcal{L}$ 一致集，B 是 $\mathcal{L}$ 公式，如果$\neg\Box B\in$w，则存在 $\mathcal{L}\cup$C（C 是可数无穷多个不在 $\mathcal{L}$ 中出现的常量的集合）极大一致的 Henkin 集 w′，使得$\Box^{-}$(w)$\cup\{\neg B\}\subseteq$ w′。

证明：由引理 4.12 和引理 4.14 可得。■

5、力迫模型和 $\mathbf{L_K}$ 的完全性

证 $\mathbf{L_K}$ 的完全性，就是要证：对任意 $\mathbf{L_K}$ 公式 A，如果 $\models A$，则 $\vdash A$。即证：如果$\nvdash A$，则 $\nvDash A$。

如果 $\nvdash A$，据引理 4.4，则有$\neg A$ 是 $\mathcal{L}_K$ 一致的。那么，只要我们找到一个 $\mathcal{L}_K$ 模型 $\mathfrak{M}$，使得$\neg A$ 在这个模型上是可满足的，就为 A 找到了一个反模型，使得 A 在 $\mathfrak{M}$ 上不可满足。如果找到这样一个模型，就可以得出：$\nvDash A$。这样，就能实现 $\mathbf{L_K}$ 的完全性证明。文中采取这样的思路来证明 $\mathbf{L_K}$ 的完全性。

对于任意 $\mathcal{L}$ 一致集 w，任意$\neg\Box B\in$w，据引理 4.15，总能实现把 $\mathcal{L}$ 一致集$\Box^{-}$(w)$\cup\{\neg B\}$扩充为 $\mathcal{L}\cup$C（C 是可数无穷多个不在 $\mathcal{L}$ 中出现的常量的集合）极大一致的 Henkin 集 w′。但是，w′并不是唯一的，可能会有很多这样的 $\mathcal{L}\cup$C 极大一致的 Henkin 集。在下面构造的 W_A 中，对于某个确定的公式 B，我们只选定一个由$\Box^{-}$(w)$\cup\{\neg B\}$扩充得到的 $\mathcal{L}\cup$C 极大一致的 Henkin 集，记为 w_B 。由于$\Box^{-}$(w)$\cup\{\neg B\}\subseteq w_B$，所以，$\{\neg B\}\subseteq w_B$，即$\neg B\in w_B$。

在下面构造的 W_A 中，我们还要求，对任意 w$\in W_A$，任意$\neg\Box B\in$w，由 w 到 w_B 的扩充是由 w 的语言 $\mathcal{L}_w$ 增加不同的新常量集 C 而得到的。也就是说，可能世界集 W_A 中的元素都是不同语言下的公式集。

定义 5.1（力迫可能世界集）　设 A 是 $\mathcal{L}_K$ 公式且$\nvdash A$。令 $W_0=\{w_0\}$，其中 w_0 的定义如下：

据引理 4.4 可得，$\neg A$ 是 $\mathcal{L}_K$ 一致的。据引理 4.12，$\{\neg A\}$可以扩充为 $\mathcal{L}_K\cup$C（C 是可数无穷多个不在 $\mathcal{L}_K$ 中出现的常量的集合）极大一致的 Henkin 集 w，使得$\{\neg A\}\subseteq$w。从这样的 w 中选定一个极大一致的 Henkin 集，记为 w_0。显然$\neg A\in w_0$。

再令 $W_{n+1} = \{w_B \mid w\in W_n,\ \neg\Box B\in w\}$

$W_A = \cup W_n$（n = 0, 1, 2, …）。　**称** W_A **为**（相对于 A 的）**力迫可能世界集**。

定义 5.2（力迫通达关系）　力迫可能世界集 W_A 上的二元关系 R_A 定义如下：

$R_A = \{<w, w_B> \mid w\in W_n,\ \neg\Box B\in w\}$。　**称** R_A **为**力迫可能世界集 W_A 上的**力迫通达关系**。

定义 5.3 （前驱世界）　对任意 w, w′$\in W_A$，如果 w′R_Aw，则称 w′是 w 的前驱世界，将 w′记为φ(w)。由此定义可知，$\mathcal{L}_w$ 是 $\mathcal{L}_{\varphi(w)}$的扩充，且$\Box^{-}(\varphi(w))\subseteq$ w。

引理 5.4　对于任意 w$\in W_{n+1}$（n = 0, 1, 2, …），w 的前驱世界φ(w)是唯一的。

证明：假设 w 的前驱世界不唯一，令 w 有两个前驱世界 w′和 w″。根据定义 5.1、定义 5.2、定义 5.3，经过推导，会得出 $w'_B = w''_C$，而这与 $w'_B\neq w''_C$ 矛盾。故假设错误，所证引理成立。■

对于任意 w$\in W_A$，记 $\mathcal{L}_w$ 中的项的集合为 T(w)。

定义 5.5 （T(w)上的等价关系）　对任意 w$\in W_A$，定义 T(w)上的二元关系如下：

$t\sim s$，当且仅当，$s\equiv t\in$w。

可以证明∼是 T(w)上的等价关系（据公理(**A6**)、内定理 **Th4** 和 **Th5**）。将 t 的等价类记为$[t]_w$。

定义 5.6　$D_A = \{[t]_w \mid w\in W_A,\ t$ 是 $\mathcal{L}_w$ 的项$\}$。

注意：t 可以是两个不同语言 $\mathcal{L}_w$ 和 $\mathcal{L}_{w'}$的项，这样，D_A 中就会有两个不同的元素$[t]_w$和$[t]_{w'}$。

令语言 $\mathcal{L}^* = \cup\mathcal{L}_w$（w$\in W_A$），这样，任意的 w$\in W_A$ 都是 $\mathcal{L}^*$公式集。

定义 5.7　$\mathbf{Exp_0(\mathcal{L}^*)}\times$W 上的偏函数 V_A 定义如下：

(1) 对 w$\in W_0$，如果 t 是 $\mathcal{L}_w$ 的项，则 $V_A(t, w) = [t]_w$；

(2) 对 w$\in W_{n+1}$，n = 0, 1, 2, …，如果存在 $\mathcal{L}_{\varphi(w)}$的常量或变元 s，使得 $s\equiv t\in$w，则 $V_A(t, w) = V_A(s, \varphi(w))$（注意，这样的 s 可能不止一个，随便取一个就行）；否则，$V_A(t, w) = [t]_w$。

(3) 对任意 $w \in W_A$，$V_A(P, w) = \{<V_A(t_1, w), \ldots, V_A(t_n, w)> \mid Pt_1\ldots t_n \in w\}$。

注意，当 $w \in W_{n+1}$ 时，$\varphi(w) \in W_n$。所以(1)和(2)构成标准的归纳定义。

由此定义可知，当 $V_A(t, w) \neq [t]_w$ 时，$V_A(t, w)$一定不是 T(w)上的等价类，即 $V_A(t, w)$不会是 D_A 中形如$[s]_w$的元素；由此定义还可知，$V_A(t, w)$有定义，当且仅当，t 是 $\mathcal{L}_w$ 的项。

由以上结果和此定义可知，$V_A(P, w)$都有定义。

定义 5.8 W_A 到 D_A 的幂集$\mathscr{P}(D_A)$的函数 Q_A 定义为，$Q_A: W_A \rightarrow \mathscr{P}(D_A)$ $Q_A(w) = \{V_A(c, w) \mid E!c \in w\}$。

引理 5.9 令 $\mathfrak{F}_A = <W_A, R_A, D_A, Q_A>$，则 $\mathfrak{F}_A$ 是一个框架。

证明：据框架定义和定义 5.1、定义 5.2、定义 5.6 和定义 5.8 可得。■

引理 5.10 对任意 $w \in W_A$，如果 t, s 是 $\mathcal{L}_w$ 的项，则 $V_A(t, w) = V_A(s, w)$，当且仅当，$t \equiv s \in w$。

证明：设 $w \in W_A$，t, s 是 $\mathcal{L}_w$ 的项。施归纳于 W_n。当 $w \in W_0$ 时，据定义 5.7(1)，易证。

当 $w \in W_{n+1}(n = 0, 1, 2, \ldots)$时，分四种情况，证明略。（参见冯艳，第 94—95 页） ■

引理 5.11 V_A 可以扩充为力迫框架 $\mathfrak{F}_A = <W_A, R_A, D_A, Q_A>$上唯一的 $\mathcal{L}$*拟赋值。

证明：由定义 5.7，V_A 是 $\mathbf{Exp_0(\mathcal{L}^*)}\times W$ 上的偏函数，由引理 3.3，只需证 V_A 满足引理 3.3 的条件。条件(1) –(4)易证，证明略。

(5) 对任意常量或变元 t，任意 $w' \in W_A$，如果 $V_A(t, w)$有定义且 wR_Aw'，则 t 是 $\mathcal{L}_w$ 项，也是 $\mathcal{L}_{w'}$项。因为 t 是 $\mathcal{L}_w$ 项且 $t \equiv t \in w'$，所以存在 $\mathcal{L}_w$ 项 s，使得 $s \equiv t \in w'$。由 V_A 的定义得 $V_A(t, w') = V_A(s, w)$。由 $s \equiv t \in w'$，得 $s \equiv t \in w$。由引理 5.10，得 $V_A(s, w) = V_A(t, w)$。所以，$V_A(t, w) = V_A(t, w')$。■

以下将这个唯一的 $\mathcal{L}$*拟赋值记为 V。

引理 5.12 对任意 $w \in W_A$，(1) 对任意非逻辑谓词 P，任意项 $t_1, \ldots, t_n$，都有$<V(t_1,w),\ldots,V(t_n, w)> \in V(P, w)$，当且仅当，$Pt_1\ldots t_n \in w$。(2) 对任意项 t，都有，$V(t, w) \in Q_A(w)$，当且仅当，$E!t \in w$。

证明：(1) 对任意非逻辑谓词 P，任意项 $t_1, \ldots, t_n$，若 $Pt_1\ldots t_n \in w$，则据 $V(P, w)$的定义，得$<V(t_1, w), \ldots, V(t_n, w)> \in V(P, w)$。若$<V(t_1, w), \ldots, V(t_n, w)> \in V(P, w)$，则存在 $Ps_1\ldots s_n \in w$，使得 $V(t_1, w) = V(s_1, w), \ldots, V(t_n, w) = V(s_n, w)$。由引理 5.10 得 $t_1 \equiv s_1 \in w, \ldots, t_n = s_n \in w$。据公理(**A7**)和 $Ps_1\ldots s_n \in w$，可得 $Pt_1\ldots t_n \in w$。

(2) 对任意项 t，如果 $E!t \in w$，则根据内定理 **Th6** 得$\exists x(x \equiv t) \in w$。因为 w 是极大一致的 Henkin 集，故存在常量 c，使得 $c \equiv t \in w$。由公理(**A7**)和 $E!t \in w$，得 $E!c \in w$。故 $V(c, w) \in Q_A(w)$。再有，根据 $c \equiv t \in w$ 和引理 5.10，可得 $V(c, w) = V(t, w)$。所以 $V(t, w) \in Q_A(w)$。

对任意项 t，如果 $V(t, w) \in Q_A(w)$，则存在常量 c，使得 $E!c \in w$ 且 $V(c, w) = V(t, w)$。由引理 5.10 得 $c \equiv t \in w$。由公理(**A7**)得 $E!c \rightarrow E!t \in w$，所以 $E!t \in w$。■

引理 5.13 （拟赋值基本定理） 对任意 $w \in W_A$，任意 $\mathcal{L}_w$ 公式 B，都有 $V(B, w) = 1$ 当且仅当 $B \in w$。

证明：施归纳于公式 A 的结构。

(1) $B = Pt_1\ldots t_n$（P 是非逻辑谓词）、$B = E!t$、$B = (t \equiv s)$、$B = \neg C$ 和 $B = C \rightarrow D$，略。

(2) $B = \forall xC$。 若 $V(B, w) = 1$，则 $V(\forall xC, w) = 1$，据定义 3.2 得，对任意 $V(c, w) \in Q_A(w)$，都有 $V_{(x/V(c, w))}(C, w) = 1$。据引理 3.5，得 $V(C(x/c), w) = V_{(x/V(c, w))}(C, w) = 1$。据归纳假设，对任意 $V(c, w) \in Q_A(w)$，都有 $C(x/c) \in w$。即对任意 $E!c \in w$，都有 $C(x/c) \in w$。由于 w 是 Henkin 集，故存在常量 c，使得$(E!c \rightarrow C(x/c)) \rightarrow \forall xC \in w$。若 $E!c \in w$ 则 $C(x/c) \in w$，所以 $E!c \rightarrow C(x/c) \in w$。若 $E!c \notin w$ 则$\neg E!c \in w$，也有 $E!c \rightarrow C(x/c) \in w$。由 $E!c \rightarrow C(x/c) \in w$ 和$(E!c \rightarrow C(x/c)) \rightarrow \forall xC \in w$，得$\forall xC \in w$，即 $B \in w$。

若 $B \in w$，则$\forall xC \in w$。据公理(**A12**)，得 $E!c \rightarrow C(x/c) \in w$。所以对任意 $E!c \in w$，都有 $C(x/c) \in w$。即对任意 $V(c, w) \in Q_A(w)$，都有 $C(x/c) \in w$。据引理 3.5，得 $V(C(x/c), w) = V_{(x/V(c, w))}(C, w) = 1$。所以对任意 $V(c, w) \in Q_A(w)$，都有 $V_{(x/V(c, w))}(C, w) = 1$。据定义 3.2，得 $V(\forall xC, w) = 1$，即 $V(B, w) = 1$。

(3) $B=\Box C$。 若 $V(B, w) = 1$，则 $V(\Box C, w) = 1$。据定义 3.2，对任意 wR_Aw'，都有 $V(C, w') = 1$。据归纳假设，对任意 wR_Aw'，都有 $C\in w'$。若$\Box C\notin w$，则$\neg C\in w_C$，由 wR_Aw_C 得 $C\in w_C$，而这与 w_C 是一致集相矛盾，故$\Box C\in w$，即 $B\in w$。 若 $B\in w$，则$\Box C\in w$。故对任意 wR_Aw'，都有 $C\in w'$。据归纳假设，对任意 wR_Aw'，都有 $V(C, w') = 1$。据定义 3.2，得 $V(\Box C, w) = 1$，即 $V(B, w) = 1$。■

引理 5.14 设 V*是 V 在 $\mathcal{L}_K$ 上的限制，则 V*是 $\mathfrak{F}_A = \langle W_A, R_A, D_A, Q_A\rangle$上的 $\mathcal{L}_K$ 赋值。

证明：首先 V*是 $\mathfrak{F}_A = \langle W_A, R_A, D_A, Q_A\rangle$上的 $\mathcal{L}_K$ 拟赋值。证明 V*是一个 $\mathcal{L}_K$ 赋值，只需证 V*满足赋值增加的条件(19)和(20)即可。注意，V*是 V 在 $\mathcal{L}_K$ 上的限制，所以，对任意 $\mathcal{L}_K$ 项 t 和 $\mathcal{L}_K$ 公式 B，都有 $V^*(t, w) = V(t, w)$，$V^*(B, w) = V(B, w)$。

(19) 对任意 $\mathcal{L}_K$ 项 t，对任意 $w\in W_A$，$\mathcal{L}_w$ 都是 $\mathcal{L}_K$ 的扩充，故 t 也是 $\mathcal{L}_w$ 项，因此 $V(t, w)$有定义，即 $V^*(t, w)$有定义。

(20) 对于摹状词ιxB（注意，B 中不含“□”），

如果 $V(c, w)$是 $Q_A(w)$中唯一使得 $V^*_{(x/V(c, w))}(B, w) = 1$ 的元素，则据 $Q_A(w)$的定义可得，$E!c\in w$ 且 $V_{(x/V(c, w))}(B, w) = 1$。由引理 3.5，得 $V(B(x/c), w) = V_{(x/V(c, w))}(B, w) = 1$。由引理 5.13 得 $B(x/c)\in w$。

因为 w 是 Henkin 集，所以存在常量 a，使得$(E!a\rightarrow(B(x/a)\rightarrow a \equiv c))\rightarrow\forall x(B\rightarrow x \equiv c)\in w$。

如果 $V(E!a, w) = 1$，且 $V(B(x/a), w) = 1$，则 $E!a\in w$。所以，$V(a, w)\in Q_A(w)$。根据引理 3.5，可得 $V_{(x/V(a, w))}(B, w) = V(B(x/a), w) = 1$，即 $V^*_{(x/V(a, w))}(B, w) = 1$。由唯一性得 $V(a, w) = V(c, w)$，故 $V(a \equiv c, w) = 1$。这就证明了 $V(E!a\rightarrow(B(x/a)\rightarrow a \equiv c)) = 1$。故 $E!a\rightarrow(B(x/a)\rightarrow a \equiv c)\in w$。因此$\forall x(B\rightarrow x \equiv c)\in w$。

由 $E!c\in w$、$B(x/c)\in w$、$\forall x(B\rightarrow x \equiv c)\in w$ 和公理(**A13**)得$\iota xB \equiv c\in w$，所以 $V(\iota xB, w) = V(c, w)$。

如果 $V(\iota xB, w)\in Q_A(w)$，则存在常量 c，使得 $E!c\in w$ 且 $V(\iota xB, w) = V(c, w)$，故$\iota xB \equiv c\in w$。再由公理(**A7**)得 $E!(\iota xB)\in w$。由公理(**A14**)得 $B(x/\iota xB)\in w$ 和$\forall x(B\rightarrow x \equiv \iota xB)\in w$，故 $V(B(x/\iota xB), w) = 1$。由引理 3.5 得 $V_{(x/V(\iota xB, w))}(B, w) = V(B(x/\iota xB), w) = 1$。$V(\iota xB, w)$就是满足 $V^*_{(x/V(\iota xB, w))}(B, w) = 1$ 的 $Q_A(w)$中的元素。

以下证唯一性，设 $V(a, w)\in Q_A(w)$，使得 $V^*_{(x/V(a, w))}(B, w) = 1$，则 $E!a\in w$ 且 $V_{(x/V(a, w))}(B, w) = 1$。由引理 3.5 得 $V(B(x/a), w) = V_{(x/V(a, w))}(B, w) = 1$，所以 $B(x/a)\in w$。由$\forall x(B\rightarrow x \equiv \iota xB)\in w$ 和公理(**A12**)得 $E!a\rightarrow(B(x/a)\rightarrow a \equiv \iota xB)$。由 $E!a\in w$ 和 $B(x/a)\in w$ 得 $a \equiv \iota xB\in w$。所以 $V(a, w) = V(\iota xB, w)$。■

V*是 $\mathfrak{F}_A = \langle W_A, R_A, D_A, Q_A\rangle$上的 $\mathcal{L}_K$ 赋值，所以，$\mathfrak{M}_A = \langle\mathfrak{F}_A, V^*\rangle$是一个 $\mathcal{L}_K$ 模型。

定理 5.15 （完全性定理） 对任意 $\mathcal{L}_K$ 公式 A，如果 $\models A$，则 $\vdash A$。

证明：对任意 $\mathcal{L}_K$ 公式 A，如果$\nvdash A$，则由W_A的构造得$\neg A\in w_0$，由引理 5.13 得 $V(\neg A, w_0) = 1$，即 $V^*(\neg A, w_0) = 1$。所以 $V^* (A, w_0) = 0$。故有 $\mathfrak{M}_A \nvDash_{w0} A$。这样就有 $\mathfrak{M}_A \nvDash A$，从而 $\mathfrak{F}_A \nvDash A$，因此$\nvDash A$。■

参考文献

陈　波，2005 年：《逻辑哲学》，北京大学出版社。

杜国平，2006 年：《经典逻辑与非经典逻辑基础》，高等教育出版社。

刘壮虎，1993 年：《逻辑演算》，中国社会科学出版社。

叶　峰，1994 年：《一阶逻辑与一阶理论》，中国社会科学出版社。

张建军，2002 年：《逻辑悖论研究引论》，南京大学出版社。

周北海，1997 年：《模态逻辑导论》，北京大学出版社。

冯　艳，2006 年：《自由摹状词理论研究》(**D**)，北京大学哲学系。

（作者单位：冯 艳，首都师范大学文学院；刘壮虎，北京大学哲学系）