现代数学和逻辑学中的公理－符号化方法
——从欧氏几何谈起

钟盛阳

“哲学与好奇”午餐会
2019年10月23日

一提到数学或者逻辑学：

(2) $B^v, C^v \vdash (B\to C)^v$。

证明：(1) 请读者自证(练习 3.2.15(1))。

(2) 分情况证明：

情况 1 $v(B\to C)=0$：则 $v(B)=1$ 且 $v(C)=0$，∴

① $(B\to C)^v=\neg(B\to C)$， $(B)^v=B$， $(C)^v=\neg C$。

下证：

② $B, \neg C\vdash\neg(B\to C)$。

据 MP，有 $B, B\to C\vdash C$，∴据演绎定理，有 $B\vdash(B\to C)\to C$。再据假言易位规则(2.3.6(2))，有 $B\vdash\neg C\to\neg(B\to C)$。∴据演绎定理的逆，有②。

据①和②，要证结果成立。

情况 2 $v(B\to C)=1$：则 $(B\to C)^v=B\to C$。∵$v(B\to C)=1$，∴据 3.1.4(1)，有 $v(B)=0$ 或 $v(C)=1$，∴还要分两种情况证明：

子情况 1 $v(B)=0$：则 $B^v=\neg B$。易见 $\neg B\vdash B\to C$，∴要证结果成立。

子情况 2 $v(C)=1$：则 $C^v=C$。易见 $C\vdash B\to C$，∴要证结果成立。◀

3.2.7 主引理 令 v 是任意指派，且令 $A\in\Sigma_n$。则

(☆) $p_1^v,\cdots,p_n^v\vdash A^v$。

证明：施 Σ_n-归纳于 A 的结构。

若 $A=p_i$ 使得 $1\leqslant i\leqslant n$。则 $A^v=p_i^v$，则显然有(☆)。

令 $A=\neg B$。据归纳假设，有

(1) $p_1^v,\cdots,p_n^v\vdash B^v$。

据 3.2.6(1)，有 $B^v\vdash(\neg B)^v$。∴据(1)和 2.2.8(1)，有

$$p_1^v,\cdots,p_n^v\vdash(\neg B)^v,$$

∴有(☆)。

令 $A=B\to C$。据归纳假设，有

(2) $p_1^v,\cdots,p_n^v\vdash B^v$， $p_1^v,\cdots,p_n^v\vdash C^v$。

据 3.2.6(2)，有 $B^v, C^v\vdash(B\to C)^v$。∴据(2)和 2.3.2(8)，有

$$p_1^v,\cdots,p_n^v\vdash(B\to C)^v,$$

∴有(☆)。◀

3.2.8 完全性定理 IS 完全。

证明：任给重言式 A。总存在自然数 n 使得 $A\in\Sigma_n$。∵A 是重言式，∴任给指派 v，有 $v(A)=1$，∴$A^v=A$。

下面我们归纳证明：

(☆) $p_i^v,\cdots,p_n^v\vdash A$， 任给指派 v 和所有 $1\leqslant i\leqslant n$。

任给指派 v 且令 $i=1$。则据主引理(3.2.7)和 $A^v=A$，(☆)成立。

令 $i=m+1$。任给指派 v，令 $v_1=v(m,1)$ 和 $v_0=v(m,0)$ 是两个如 3.2.3 定义的指派。据归纳假设，有

(1) $p_m^{v_1},\cdots,p_n^{v_1}\vdash A$， 且

(2) $p_m^{v_0},\cdots,p_n^{v_0}\vdash A$。

据 3.2.5(2)—(3)，有

$p_m^{v_1}=p_m$， $p_m^{v_0}=\neg p_m$，

$p_{m+1}^{v_1}=p_{m+1}^{v_0}=p_{m+1}^v$，

……，

$p_n^{v_1}=p_n^{v_0}=p_n^v$。

∴据(1)和(2)，有

(3) $p_m, p_{m+1}^v,\cdots,p_n^v\vdash A$，且

(4) $\neg p_m, p_{m+1}^v,\cdots,p_n^v\vdash A$。

据(3)，(4)和 2.3.6(3)(Ⅱ)，我们有

$$p_{m+1}^v,\cdots,p_n^v\vdash A。$$

这样，我们归纳证明了(☆)。

若 $i=n$，则据(☆)，有

使用符号的原因

大量使用符号

$\Uparrow$

公理－符号化方法

$\Uparrow$

把能说清楚的话说清楚

说明

- 本报告所涉及的主要观点都成型于20世纪初。
- 我根据个人的朴素的思考和体会把这些观点总结、串联起来。

公理化方法

公理－符号化

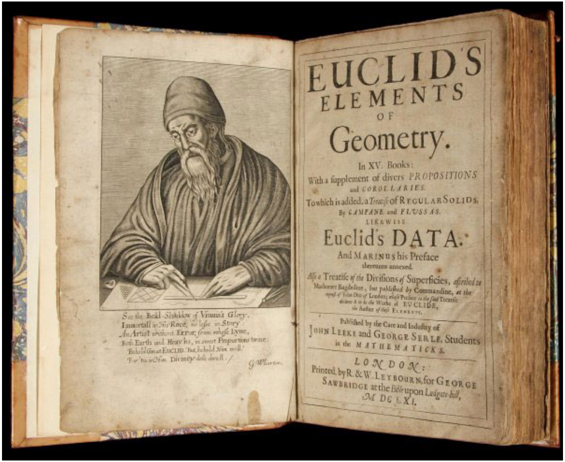
公理－符号化方法的缺点、好处、应用

公理化方法

公理一符号化

公理一符号化方法的缺点、好处、应用

《几何原本》（公元前300年）：公理化方法的典范



图片来源：www.biographyonline.net/scientists/euclid.html

公理化方法

- 一个理论是一组陈述。
- 将一个理论公理化，就是选出这个理论中的一些陈述，使得这个理论刚好是从这些陈述出发可以推导出来的陈述的全体。

$$\text{公理} \xrightarrow{\text{推理}} \text{定理}$$

一个问题

问题1：将一个理论公理化有什么好处？

1. 理论中的陈述不再分散并立而是有结构、有层次
2. 明确建立理论的出发点

仅仅如此吗？

另一个问题

问题2：作为几何学的初始（基本）概念，点、线、面、体是如何被定义的？

以下是《几何原本》的第1页：

第 I 卷

定 义

1. 点是没有部分的。

2. 线有长度没有宽度。

3. 线的两端是点。

4. 直线是它上面的点一样地横放着的线。

这些是合格的定义吗？显然不是！

合格定义的一个例子

矩形是四个内角都是直角的平行四边形。

这种定义有时称为“属加种差定义”，也称为“直接定义”。

定义何为？

定义的作用（之一）在于：避免歧义，保证讨论有意义

A: Jack is a bachelor.
B: No, he isn't. He is married.
A: Yes, I know that he is married.

直接定义是否必要？

$$\text{有意义的话} \xrightarrow{\text{保持有意义性的转换}} \text{有意义的话}$$

$$\text{真陈述} \xrightarrow{\text{保真的转换}} \text{真陈述}$$

$$\text{几何学公理} \xrightarrow{\text{演绎推理}} \text{几何学定理}$$

《几何原本》表明这是可行的方法。

小结

公理化方法的一个重要作用就是用一种严格的方式建立一个独立的理论：这个理论的初始（基本）概念不需要用其他的概念来定义，这些初始（基本）概念的“有意义的使用”由公理和推理规则来保证。

补充说明（1）：欧氏几何的严格公理化

1. 在一个公理化的理论中，初始（基本）概念也称“不定义概念”，或者称它们“被公理间接定义”。
2. 亚里士多德在《工具论》里面已经指出一个理论里面一定会有不定义概念，但后人大部分都忽视了这一点。
3. 从现代数学的观点来看，《几何原本》的公理是不完全的，推理是不严密的。
4. 欧氏几何的第一个严格的公理化的理论由大卫·希尔伯特在《几何基础》(1899)中给出。

图片来源：de.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert

补充说明（2）：公理化方法在现代数学中的运用

在现代数学中，关于各种不同的、重要的数学对象，我们都建立了相应的公理化的理论：

- 关于自然数的公理化理论
- 关于集合的公理化理论
- 关于实数的公理化理论

……

公理化方法

公理一符号化

公理一符号化方法的缺点、好处、应用

又一个问题

问题3：解析几何为什么是研究欧氏几何的一个靠谱的方法？

又另一个问题

公理化的几何学理论并不对初始（基本）概念做出直接的定义，而只是规定了对它们的“有意义的使用”。

问题4：如果用其他的对象来解释几何学的公理得到的也是真陈述，那么几何学的公理化理论是不是也是关于这些非几何的对象的公理化理论？

希尔伯特的回答：Ja!

“如果几何学的公理也适用于椅子、桌子和啤酒杯，那么几何学的理论也是关于椅子、桌子和啤酒杯的理论。”

点	线	面	线经过点	...
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	...
椅子	桌子	啤酒杯	桌子和椅子配套	...

对于两个不同的点，有且只有一条线同时经过这两个点

$\Downarrow$

对于两把不同的椅子，有且只有一张桌子同时与这两把椅子配套

几何学的公理化理论里面的点、线、面，不仅可以被解释为我们直观中的点、线和面（这是我们建立几何学的原意），原则上也可以被解释为其他的东西，只要在这一解释下几何学公理都是真陈述。

一个严肃的例子

点	线	面	线经过点	...
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	...
实数三元组	一组两个互相独立的三元一次方程	三元一次方程	实数三元组是方程组的解	...

对于两个不同的点，有且只有一条线同时经过这两个点

$\Downarrow$

对于两个不同的实数三元组，有且只有一组两个互相独立的三元一次方程使得这两个实数三元组同时是它的解。

符号化

公理化的几何学理论并不对初始（基本）概念做出直接的定义，而只是规定了对它们的“有意义的使用”。

所以，几何学的初始（基本）概念在不同的语境下可以有不同（但确定）的解释——几何学的初始（基本）概念只是符号。

一般地，公理化的理论的初始（基本）概念都只是符号，其“有意义的使用”由公理和推理规则规定。

在数学理论中逻辑联结词都是符号

算术	几何	逻辑
0，1，2等 自然数	点、线、面等 几何对象	命题
加法、乘法 减法、除法等 自然数上的操作	线经过点、 线在面上等 几何对象之间的关系	使用“并且”“或者” “如果...那么...”等 联结命题的操作

数理逻辑：可以建立一个关于数学中的演绎推理的公理化理论，所以逻辑联结词都是符号。

数学理论都外显为符号游戏

数学陈述 $\to$ 符号串

演绎推理 $\to$ 按照规则进行符号串的变换

公理 $\to$ 选定的一些符号串

定理 $\to$ 从选定的符号串出发按照规则变换所得到的符号串

数学理论的实质？

公理化的数学理论只是规定了初始（基本）概念的“有意义的使用”，那么有的这个意义是什么？

众说纷纭：

- 实在论/柏拉图主义
- 逻辑主义
- 直觉主义
- 形式主义/演绎主义

. . .

即使对不同的人有不同的意义，游戏还是可以大家一起玩。
关于意义本身的认识并不是“有意义地使用”的必要条件。
遵守规则是“有意义地使用”的充分必要条件。

小结

- 公理化的理论并不对初始（基本）概念做出直接的定义，而只是规定了对它们的“有意义的使用”。
所以，公理化的理论的初始（基本）概念在不同的语境下可以有不同（但确定）的解释，所以它们都只是符号。
- 数学理论都外显为符号游戏。

公理化方法

公理—符号化

公理—符号化方法的缺点、好处、应用

公理－符号化方法的缺点

当关于一些对象的一个理论被符号化时，这个理论很可能就不再仅仅关于这些对象了：
几何学因为公理化而被符号化时，它就不再仅仅关于几何对象。

荷兰哲学家斯宾诺莎写有名著《（用几何学方法作论证的）伦理学》。他用欧氏几何的公理化方法建立他的本体论、认识论和伦理学理论。
从现在的观点来看，他也许需要考虑符号化这一问题。

公理—符号化方法的好处（1）

- 对于初始（基本）概念的“有意义的使用”形成共识
- 明晰性：没有比符号的组合和变换（的规则）更简单、更机械、更无异议的操作

  例子：语言分析

$$\frac{\text{每个数都小于或等于某个数}}{\text{有一个最大的数}}$$

$$\exists x \forall y (y \leq x) \qquad \text{vs.} \qquad \forall y \exists x (y \leq x)$$

公理—符号化方法的好处（2）

- 抽象性：公理化的几何学理论不再依赖于图形和几何直观
- 一般性：能应用于其他对象或领域
- 计算机辅助研究
- 一个数学理论可以被视作一个整体、一个对象来研究，不同的数学理论可以联系和比较

公理—符号化的应用（1）：相对一致性

点	线	面	线经过点	...
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	...
实数三元组	一组两个互相独立的三元一次方程	三元一次方程	实数三元组是方程组的解	...

对于两个不同的点，有且只有一条线同时经过这两个点

$\Downarrow$

对于两个不同的实数三元组，有且只有一组两个互相独立的三元二次方程使得这两个实数三元组同时是解。

如果实数理论中没有矛盾，那么欧氏几何也没有矛盾。

公理一符号化的应用（2）：公理的独立性

	标准解释	非标准解释
公理1	真	真
公理2	真	真
$\dots$	$\dots$	$\dots$
公理$*$	真	假

例子：平行公理（第5公设）独立于欧氏几何的其他公理

公理—符号化的应用3：解析几何

数	加法	乘法	$\ldots$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\ldots$
中心射影变换	两个中心射影变换的某种组合	两个中心射影变换的复合	

如果可以证明关于数的公理在上述解释之下都是关于几何对象的真陈述，那么可以通过研究数来研究几何。

公理－符号化的应用4：数学在自然科学中的运用

将一个数学理论中的初始（基本）概念解释为自然科学中的对象，通过研究数学来研究自然科学？

科学理论是否像一个比喻，本体是科学现象，喻体是数学的公理－符号化理论？
这是否与古希腊自然哲学相似，只是现在发现的科学现象太复杂，以至于需要精致的数学理论作为喻体？

公理－符号化的应用5：量子逻辑

解析几何是解决几何问题的一个很方便的量化工具。
但是几何学的基本对象不是数而是点、线、面、体，所以几何学的公理－符号化理论仍有其价值。

微观物理对象是不能直接用眼看到的，我们只能通过从仪器上读出的数字来研究它。
量子理论是解决微观物理问题的一个很强大的量化工具。
量子逻辑的研究目的之一是找出关于状态、性质等基本物理概念相对于量子理论的公理－符号化理论以凸显这些概念在量子理论中的特殊内涵。

小结

- 公理－符号化方法是一把双刃剑。
- 公理－符号化方法在数学研究中有重要的意义和应用。

总结

- 数学家和逻辑学家大量使用各种符号，动机只是为了把能说清楚的话尽可能说清楚。
- 为了界定一个理论中的初始（基本）概念从而保证讨论有意义，公理化方法是自然（甚至唯一）的选择。
- 在一个公理化的理论中，被用于指称初始（基本）概念的语词难免在不同语境下有不同解释，以至于沦为符号。

谢谢！

参考文献

- 小平邦彦，《几何世界的邀请》，人民邮电出版社，2017
- 莫里斯·克莱因，《数学简史：确定性的消失》，中信出版集团，2019
- Beutelspacher & Rosenbaum, *Projective Geometry: From Foundations to Applications*, Cambridge University Press, 1998
- Hilbert, *The Foundations of Geometry*, The Open Court Publishing Company, 1950
- Linnebo, *Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, 2017